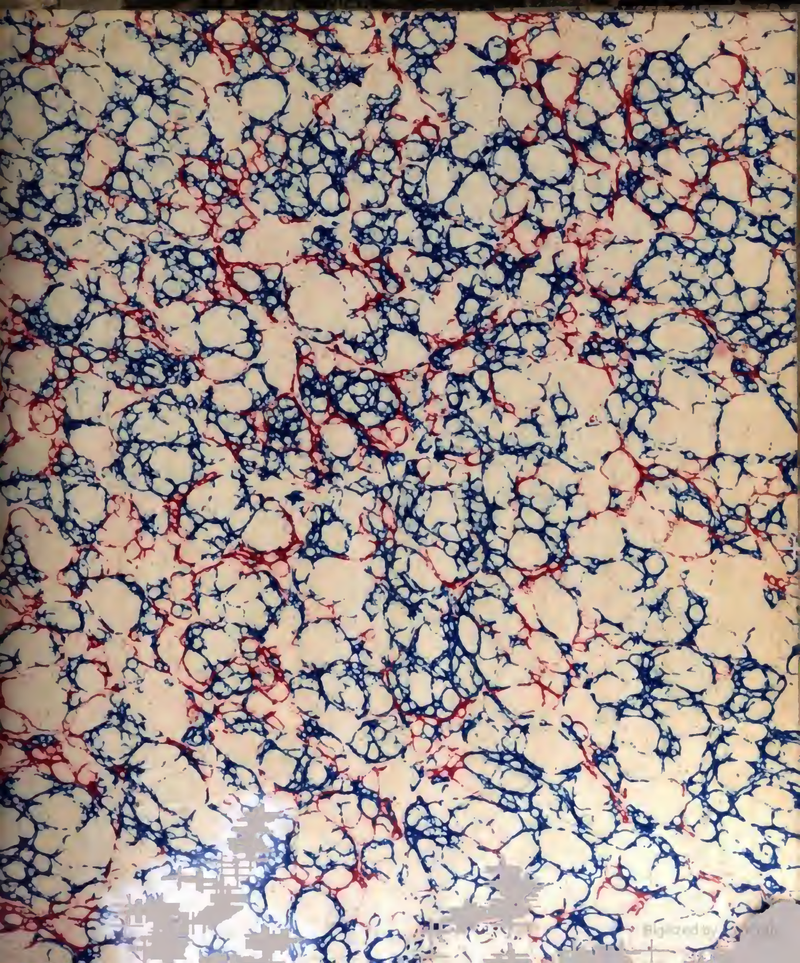
UNTERSUCHUNGEN IN DEM GEBIETE DER MECHANIK UND HYDRAULIK

Julius Weisbach





UNTERSUCHUNGEN

IN DEM

GEBIETE DER MECHANIK UND HYDRAULIK,

AUF EIGENE

BEOBACHTUNGEN UND VERSUCHE

GEGRÜNDET

VON

JULIUS WEISBACH,

PROFESSOR AN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN BERGACADEMIE ZU FREIBERG.

ERSTE ABTHEILUNG.

VERSUCHE ÜBER DEN AUSFLUSS DES WASSERS DURCH SCHIEBER, HÄHNE, KLAPPEN UND VENTILE.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1842.

VERSUCHE

ÜBER DEN

AUSFLUSS DES WASSERS DURCH SCHIEBER, HÄHNE, KLAPPEN UND VENTILE,

ANGESTELLT UND BERECHNET

VON

JULIUS WEISBACH,

PROFESSOR AN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN BERGACADEMIE ZU FREIBERG.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1842.

Vorrede.

So gross auch die jetzigen Fortschritte in einigen Zweigen der Naturlehre sind, so ist doch für die weitere Ausbildung der Hydraulik, dieses wegen seiner praktischen Anwendbarkeit so wichtigen Theiles der Naturkunde, in den neueren Zeiten nur wenig geschehen. Insbesondere hat man für die Theorie der Bewegung des Wassers in Gefässen und des Ausflusses aus diesen wenig gethan, und es sind in den letzten Jahrzehnten nur durch *Poncelet* und *Lesbros*, *D'Aubuisson* und *Castel*, durch *Bidone*, *Buff* und *Savart* einige, zum Theil allerdings bedeutende, Lücken auf dem Wege des Experimentirens ausgefüllt worden; allein sehr viel bleibt hierin noch zu thun übrig. Wie viele Verhältnisse bei der Bewegung und dem Ausflusse des Wassers gibt es nicht, wo die Theorie entweder gar keine, oder sehr unsichere Auskunft ertheilt. Es sind namentlich noch viele Beobachtungen und Versuche zu machen nöthig, um solche Mängel zu beseitigen und der Theorie zu ihrer weiteren Ausbildung neue Grundlagen zu verschaffen.

Von dieser Ansicht ausgehend, hat sich der Verfasser dieser Schrift die Aufgabe gestellt, durch hierzu besonders anzustellende Beobachtungen und Versuche noch unbekannte und ihm für die praktische Mechanik zunächst am wichtigsten scheinende Bewegungs- und Ausflussgesetze des Wassers auszumitteln, und hierdurch die vorhandenen Theorien zu erproben, und diese da, wo es nöthig ist, zu ergänzen und nach Befinden zu verbessern. Die Verhältnisse beim Ausflusse des Wassers durch Hähne, Ventile u. s. w., welche seither noch ganz unbekannt waren und für welche die Theorie nur unsichere Regeln geben kann, schienen mir wegen ihrer praktischen Anwendbarkeit wichtig und erspriesslich genug, um über dieselben besondere Versuche anzustellen. Deshalb ging ich denn auch zunächst an die Ausführung von Versuchen über den Durchgang des Wassers durch diese, den Ausfluss desselben regulirenden Vorrichtungen, wie Schieber, Hähne, Klappen, Ventile u. s. w., und ich bin in den Stand gesetzt, dem hydraulischen Publicum hiermit die Ergebnisse dieser ersten Versuche zu übergeben.

Obgleich ich mich sehr bemüht habe, diese Versuche möglichst auszudehnen und dieselben unter vielen und von einander abweichenden Umständen und Verhältnissen durchzuführen, so habe ich doch noch Manches unberücksichtigt lassen und manche Wünsche in dieser Beziehung für jetzt noch unterdrücken müssen. Namentlich wäre es mir erwünscht gewesen, einige dieser Versuche in grösserem Massstabe und andere bei grösserem Drucke anstellen zu können. Jetzt, nachdem ein Jahr verflossen ist seit Ausführung dieser Versuche, bin ich dem gesteckten Ziele insofern etwas näher gekommen, als bereits die Einleitungen zur Ausführung neuer Versuche bei höherem Drucke getroffen worden sind.

Ein wichtiges Ergebniss dieser Versuche ist die durch dieselben nachgewiesene Veränderlichkeit der Contractions- und Ausflusscoefficienten, wonach dieselben von 0,6 bis 1,0 wachsen, wenn das Verhältniss zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der ebenen Wand, worin diese sich befindet, von 0 bis 1,0 zunimmt. Deshalb gibt auch die Theorie ganz unbrauchbare Resultate, wenn sie auf diese Veränderlichkeit nicht Rücksicht nimmt. Ebenso hat sich herausgestellt, dass der Coefficient für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren nicht constant ist, sondern von dem Verhältnisse zwischen dem Querschnitte derselben und dem Querschnitt der Wand, worin dieselbe befindlich ist, abhängt.

Um das Gesetz dieser Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten kennen zu lernen, wurden in diesem Jahre neue Versuche von mir angestellt, und es ist meine Absicht, die Ergebnisse dieser in einem zweiten Hefte als Fortsetzung dieser Schrift zu veröffentlichen. Von besonderem Einflusse sind diese Verhältnisse der unvollkommenen Contraction beim Ausflusse durch Schutzöffnungen. Selten befinden sich diese in einem Reservoir, worin das Wasser als stillstehend angesehen werden darf, sondern fast immer befinden sich die Schützen in Gerinnen, worin sich das Wasser mit einer oft nicht unbedeutenden Geschwindigkeit bewegt. In den Fällen, wo das Wasser schon mit einer messbaren Geschwindigkeit an der Öffnung ankommt, ist aber die Contraction kleiner als wenn das Wasser vor derselben beinahe ruhig steht, es ist also auch die Ausflussmenge grösser als in diesem Falle, und nicht bloss aus dem Grunde, weil die Geschwindigkeit grösser, sondern auch deshalb, weil der Contractionscoefficient ein grösserer ist. Je schneller das Wasser an der Schutzöffnung ankommt, desto weniger contrahirt sich der durchfliessende Strahl und desto grösser ist demnach die Wassermenge*). So schätzbar auch die

*) In dem ersten Anhang zur neuesten Ausgabe (1842) von *Eytelwein's* Hydraulik wird aus Versuchen von *Bidone* und aus anderen von *Eytelwein* selbst der Ausflusscoefficient (μ) für den Ausfluss durch Überfälle berechnet, und für die Versuche des Ersten im Mittel

$$\mu = 0{,}62015$$

dagegen für die des Zweiten

$$\mu = 0{,}64580$$

gefunden.

Versuche von *Poncelet* und *Lesbros* über den Ausfluss durch rectanguläre Öffnungen sind, so bleibt doch der Gebrauch der Resultate dieser nur auf den Fall eingeschränkt, wenn sich die Öffnung in einem grossen Reservoir befindet, oder es sind wenigstens an denselben besondere Correctionen zu machen nöthig, wenn man sie auf den Ausfluss durch Schutzöffnungen in Gerinnen, worin das Wasser eine nicht unbedeutende Geschwindigkeit hat, anwenden will. Die Abhängigkeit der Contractionscoefficienten beim Ausflusse durch Schutzöffnungen von der relativen Grösse dieser Öffnungen soll ebenfalls durch besonders hierzu angestellte Versuche ausgemittelt werden, und es sind auch bereits die hierzu nöthigen Vorbereitungen getroffen worden. Die Ausführung dieser Versuche stellt sich dem Verfasser um so dringender heraus, da er der Kenntniss der Coefficienten für den Ausfluss bei unvollkommener Contraction bei Berechnung anderer Versuche, welche die Bestimmung der Wirkungsgrade der vorzüglichsten Berg- und Hüttenmaschinen bezwecken, benöthigt ist. Er wird deshalb aus doppelten Gründen möglichst bald zur Ausführung dieser Versuche schreiten und hofft die Ergebnisse derselben in einer Fortsetzung dieser Schrift ebenfalls publiciren zu können.

Bei der Berechnung und Zusammenstellung der Versuche, von denen die Resultate hier vorliegen, hat es der Verfasser für zweckmässig, ja er möchte sagen, für nöthig gefunden, ausser den Contractions-, Geschwindigkeits- und Ausflusscoefficienten den Begriff eines Widerstandscoefficienten einzuführen. Der Kraft-, Druck- oder Gefällverlust, welchen ein Hinderniss in einer Röhre, z. B. der Durchgang durch eine Verengung in derselben, erzeugt, ist der Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$, welche der Geschwindigkeit (v) des in der Röhre fliessenden Wassers entspricht, proportional; deshalb lässt sich auch das Verhältniss der diesen Verlust messenden Wassersäule zur Geschwindigkeitshöhe durch einen besonderen Coefficienten ausdrücken. Wir schlagen vor, dieses Verhältniss, also die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die, einem durch eine Verengung u. s. w. gebildeten Hindernisse entsprechende, Widerstandshöhe zu erhalten, den Widerstandscoefficienten für dieses Hinderniss zu nennen, und bezeichnen ihn in der Folge mit ζ. Aus dem Ausflusscoefficienten μ für irgend einen Ausflussapparat, und aus dem Ausflusscoefficienten μ_1 für denselben bei Hinzutritt eines Hindernisses, ergibt sich der diesem Hindernisse entsprechende Widerstandscoefficient durch

---

Eytelwein glaubt die Differenz dieser Ergebnisse in der Verschiedenheit der Wanddicken suchen zu müssen. Allerdings war die Wand bei den Versuchen von *Bidone* von Kupfer und nur $\frac{1}{2}$ Linie dick, und bei denen von *Eytelwein* von Holz und $1\frac{1}{2}$ Zoll dick; allein wir haben Grund, diese Abweichung lediglich nur dem Umstande beizumessen, dass bei den Versuchen von *Eytelwein* das Wasser viel schneller an der Mündung ankam als bei denen von *Bidone* und eben auch um deshalb weniger contrahirt wurde als bei diesen.

die einfache Formel $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$. Zur bequemen Berechnung der Ausflusscoefficienten und Widerstandscoefficienten aus einander dient die am Ende dieser Abhandlung befindliche Tabelle No. XXXIV. Übrigens glauben wir, dass es erspriesslich sei, den Widerstandscoefficienten auch in dem gewöhnlichen Vortrag der Hydraulik einzuführen.

Bei Ausführung dieser Versuche haben mich zwei ehemalige Zöglinge der Königl. Bergacademie, Herr *Hanns Lingke* und *Herrmann Ritter*, unterstützt, und es hat der Letztere die sämmtlichen Versuche ohne Unterbrechung mit durchgeführt: weshalb ich mich verpflichtet fühle, meinen Dank hier auszusprechen.

Freiberg, den 1sten August 1842.

Der Verfasser.

Inhalt.

Errata.

Seite 20, Zeile 2 von oben statt $\left(\frac{r}{b}\right)$ ist zu setzen $\left(\frac{r}{b}\right)^2$.
- 44, - 21 in der letzten Vertikalcolumne statt 52,567 ist zu setzen 54,567.
- 88, - 13 von unten statt (0,5) ist zu setzen $(0,5)^2$.

Einleitung.

Die Versuche über den Ausfluss des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, deren Ergebnisse hier vorliegen, wurden innerhalb des 20sten März und 7ten August 1841 bei einer Wassertemperatur von 5° *C.* bis 13° *C.* vorgenommen. Bei der Berechnung derselben ist jedoch auf diese Temperaturverschiedenheit nicht Rücksicht genommen worden. Es wurde für zweckmässig und den Umständen angemessen gefunden, diese Versuche bei abnehmender Druckhöhe, also ohne Wasserzufluss während einer Beobachtung, anzustellen, und deshalb war es auch nöthig, sich eines möglichst richtig prismatischen Ausflussgefässes zu bedienen. Dieses aber bestand in einem in Fig. 1, 2, 3 Tafel I. abgebildeten parallelepipedischen Kasten (*A*) von Fichtenholz, von 93 Centimeter Höhe und 66 Centimeter mittlerer Länge und Weite im Lichten, bei 2,8 Centimeter Wandstärke. Zwei eiserne Reifen gaben diesem Kasten die erforderliche Festigkeit und Dauerhaftigkeit und ein zweifacher Anstrich mit einer dicken rothen Firnissfarbe ertheilte ihm die nöthige Wasserdichtigkeit. Der Grad der Vollkommenheit in seiner prismatischen Form wird aus der unten ausgeführten Berechnung des mittleren Querschnittes deutlich.

Während der Versuche stand der Kasten auf Holzböcken (*B*), und um ihn sicher und mit seinen Seitenflächen senkrecht aufzustellen, wurden noch die Stollen (*C*) untergeschoben und Keile eingetrieben.

Um sich des Bodensatzes von Zeit zu Zeit zu entledigen, diente ein während der Versuche verstopftes Spundloch im Boden des Kastens, durch welches das ganze Wasser abgelassen werden konnte.

Der Wasserstand wurde an knieförmig gebogenen und mit conischen Spitzen ausgerüsteten Eisenstiften (Fig. 4) beobachtet. Zu diesem Behufe wurden dieselben mit ihren schraubenförmigen Enden so tief in die eine Seitenwand des Kastens eingebohrt, dass die nach oben gerichteten Kegelspitzen noch 6 Centimeter von der Seitenwand abstanden. Die obere Spitze (*a* Fig. 1) stand 3 Centimeter und die untere (*b* Fig. 1) 41 Centimeter unter dem obern Rande des Kastens. Man füllte vor dem Anfange eines Versuches den Kasten so voll, dass ein Theil des Wassers oben überlief, weil dadurch die Wassermasse eher beruhigt wurde als auf jede andere Weise. Die Beobachtungszeit nahm ihren Anfang, wenn der Wasserspiegel die obere Spitze berührte, und wurde beendigt, so wie die untere Spitze aus dem Wasser hervortrat.

1

Nur in wenigen Fällen, und zwar bei sehr kleinen Ausflussgeschwindigkeiten, wo sonst die Ausflusszeit zu lange gedauert haben würde, wurde das Ausfliessen bis zu einem mittleren, 17,5 Centimeter unter dem Kastenrande stehenden Stifte (*c*) beobachtet, wobei ein Wasserkörper von nur 14,5 Centimeter Höhe ausfloss, während bei den gewöhnlichen Versuchen diese Höhe 38 Centimeter betrug. Da der Querschnitt des Kastens circa 0,66 Meter Länge und Breite, also 0,4356 Quadratmeter Inhalt hatte, so war die gewöhnliche Ausflussmenge ohngefähr 0,4356. 38 $=$ 0,1655 Cubikmeter und die ausserordentliche nur 0,4356. 0,145 $=$ 0,0632 Cubikmeter.

Das Beobachten des Wasserstandes mittels der nach oben gerichteten Spitzen wurde deshalb dem Endzwecke sehr entsprechend gefunden, weil sich der Austritt der Spitze aus dem Wasser deutlich durch eine kleine Welle kundgab. Anfänglich war die obere Spitze nach unten gerichtet, da sich aber in diesem Falle von dem sinkenden Wasser ein nicht unbedeutender Wasserberg an die Spitze anhing, so wurde der Zeitpunkt des Durchganges von dem Wasserspiegel durch diese Spitze zu spät wahrgenommen.

Die Entfernung der Spitzen wurde mittels eines Stangenzirkels möglichst genau und zwar für jede Versuchsreihe besonders gemessen. Da beim Einsetzen des Ausflussapparates ein Anstossen an die Stifte nicht immer vermieden werden konnte, so sind die in den unten folgenden Angaben enthaltenen Differenzen in den Abständen der Spitzen erklärlich.

Die Ausflusszeit wurde mittels einer guten, halbe Secunden schlagenden Cylinderuhr ohne Stundenzeiger beobachtet. Übrigens wurde der Gang derselben von Zeit zu Zeit geprüft, und wenn es nöthig war, justirt.

In der Regel wurde ein Versuch 2 bis 4 Mal wiederholt, höchst selten, und nur wenn besondere Gründe vorlagen, begnügte man sich mit einem Versuche; dagegen wurden manche Versuche, namentlich solche, welche einer ganzen Versuchsreihe zu Grunde gelegt werden sollten, mehr als 5 Mal, und zuweilen selbst über 10 Mal, und oft zu sehr verschiedenen Zeitpunkten angestellt, doch wurde hierbei eine Differenz von höchstens einer Zeitsecunde nur selten wahrgenommen.

Zum Einsetzen der Ausflussapparate (Röhren, Hähne u. s. w.) diente ein rundes Seitenloch (*D* Fig. 1 und 3) von 7 Centimeter Weite, dessen unterer Rand noch 9 Centimeter vom Boden des Wasserkastens abstand. Für dieses Loch wurden zwei in vier Stücke zerschnittene hohle Spünde (Fig. 5 und 6 Taf. I.) gedreht, einer mit einer kleineren runden Öffnung von 5 Centimeter Durchmesser, ein anderer aber mit einer $5\frac{3}{4}$ Centimeter weiten und $3\frac{1}{2}$ Centimeter hohen rectangulären Öffnung zur Aufnahme der Ausflussröhren.

Die mit Schiebern, Hähnen u. s. w. ausgerüsteten Ausflussröhren aber waren entweder cylindrisch oder parallelepipedisch, jene 4 Centimeter, diese aber $2\frac{1}{2}$ und 5 Centimeter im Lichten weit.

Um auch den Ausfluss durch die Mündung in der dünnen ebenen Wand beobachten zu können, und um zugleich den regelmässigen Eintritt des Wassers in die Ansatzröhren zu begünstigen, wurde das Spundloch von Innen mit Messingplatten wie Fig. 7 und 8 bedeckt, wovon die eine ein den runden und die andere ein den prismatischen Röhren genau entsprechendes Loch hatte. Eine solche Messingplatte war 14 Centimeter lang und breit, und nur ein Millimeter dick, sie wurde durch 8 Stifte auf die innere Fläche des Kastens aufgenagelt, nachdem die zu

bedeckende Stelle einen dünnen Überzug von Baumwachs erhalten hatte. Man sieht hiernach, dass die runde Ausflussmündung einen Querschnitt von circa $2^2.\pi = 4\pi = 12,57$ Quadratcentimeter und die rectanguläre einen solchen von $2,5.\ 5 = 12,5$ Quadratcentimeter Inhalt hatte, also beide Mündungen, und sonach auch die Ansatzröhren, im Querschnitte nur wenig von einander abwichen.

Ausser diesen Ausflussröhren wurden auch noch engere, in Fig. 9 und 10 abgebildete Ansatzröhren eingesteckt und mit ihren Lappen durch 4 Schrauben an die innere Fläche des Kastens befestigt. Die an diese Röhren angegossenen Lappen waren auf der Stirnfläche eben abgeschliffen und machten deshalb die Messingplatten unnöthig. Diese kurzen Ansatzröhren waren 12,5 Centimeter lang und aussen gerade so weit, als die längeren und weiteren Ansatzröhren inwendig, weshalb diese über jene weggeschoben werden und dadurch eine zusammengesetzte Röhre wie Fig. 11 Taf. I. hergestellt werden konnte. Die kurze cylindrische Ansatzröhre war im Lichten 3,3 Centimeter weit, hatte also einen Querschnitt von circa 8,55 Quadratcentimeter Inhalt, die kurze vierseitige Ansatzröhre hingegen war 4,2 Centimeter weit und 1,9 Centimeter hoch, weshalb also ihr Querschnitt 7,98 Quadratcentimeter enthielt.

Die Dimensionen der Ein- und Ausmündungen wurden auf folgende Weise gefunden. Man nahm ein Messingdrahtstück von circa $1\frac{1}{2}$ Millimeter Dicke, schlug dieses mit einem kleinen Hammer etwa 3 Mal so breit als dick, schnitt es ohngefähr so lang als die auszumessende Weite ab und feilte die Enden scharf zu. Wenn nun dieses so erhaltene Maass noch zu lang war, so wurde das eine Ende desselben noch mehr abgefeilt, war es aber zu kurz, so wurde das Drahtstück mit dem Hammer gestreckt. Man fuhr nun mit dem einen oder dem anderen so lange fort, bis dieses Maass genau in die auszumessende Weite einpasste. Endlich legte man dieses auf einen genauen Transversalmaassstab, auf dem man die Länge desselben, und also auch die in Frage stehende Mündungsweite ablesen konnte. Dieses mir vom Herrn Bergmechanikus *Lingke* gezeigte Verfahren gewährte Bequemlichkeit, Sicherheit und Genauigkeit zugleich, denn es liessen sich auf diese Weise, besonders unter der Loupe, die Dimensionen bis auf Zehntelmillimeter leicht und sicher angeben und Hundertelmillimeter noch abschätzen.

Um den mittleren Querschnitt A des Wasserkastens genau zu erhalten, wurde sowohl über den Stiften als auch in der Mitte zwischen beiden, also in drei Horizontalschnitten, und zwar nicht allein an den Seiten, sondern auch in der Mitte zwischen diesen, die Länge und Weite ausgemessen, wie Fig. 12 A, B, C deutlich macht. Hiernach hat man gefunden:

1) vom unteren Querschnitte
   die Längen: 0,6650 M.; 0,6675 M. und 0,6643 M.,
   die Breiten: 0,6595 „ 0,6610 „ „ 0,6590 „
2) vom mittleren Querschnitte
   die Längen: 0,6660 M.; 0,6666 M. und 0,6647 M.,
   die Breiten: 0,6585 „ 0,6577 „ „ 0,6585 „
3) vom oberen Querschnitte
   die Längen: 0,6685 M.; 0,6680 M. und 0,6670 M.,
   die Breiten: 0,6573 „ 0,6590 „ „ 0,6576 „

Bei Anwendung der *Simpson*'schen Regel folgte hiernach

1) für den unteren Querschnitt

$$\text{die mittlere Länge} = \frac{0{,}6650 + 4.\ 0{,}6675 + 0{,}6643}{6}$$

$$= \frac{3{,}9993}{6} = 0{,}66655 \text{ Meter,}$$

$$\text{die mittlere Breite} = \frac{0{,}6595 + 4.\ 0{,}6610 + 0{,}6590}{6}$$

$$= \frac{3{,}9625}{6} = 0{,}66041 \text{ Meter;}$$

folglich der mittlere Inhalt

$$A_1 = 0{,}66655.\ 0{,}66041 = 0{,}440095 \text{ Quadratmeter.}$$

Auf dieselbe Weise folgte

2) für den mittleren Querschnitt

die mittlere Länge = 0,66616 Meter,

die mittlere Breite = 0,65796 Meter,

und folglich der mittlere Inhalt

$$A_2 = 0{,}66616.\ 0{,}65796 = 0{,}438307 \text{ Quadratmeter.}$$

Endlich

3) für den oberen Querschnitt

die mittlere Länge = 0,66792 Meter,

die mittlere Breite = 0,65848 Meter,

und demnach der mittlere Inhalt

$$A_3 = 0{,}66792.\ 0{,}65848 = 0{,}439812 \text{ Quadratmeter.}$$

Aus diesen drei Querschnitten A_1, A_2 und A_3 ergab sich nun mittels der *Simpson*'schen Regel wieder der mittlere Werth derselben

$$= \frac{0{,}440095 + 4.\ 0{,}438307 + 0{,}439812}{6}$$

$$= \frac{2{,}633135}{6} = 0{,}438856 \text{ Quadratmeter.}$$

Diese Bestimmung bezieht sich auf eine Messung, welche wenige Tage vor dem Ende der Versuche vorgenommen wurde. Folgende Ergebnisse sind dagegen durch eine zu Anfang der Versuche angestellte Messung gewonnen worden.

Inhalt des unteren Querschnittes:

$$A_1 = 0{,}66823.\ 0{,}65773 = 0{,}439515 \text{ Quadratmeter.}$$

Inhalt des mittleren Querschnittes:

$$A_2 = 0{,}66658.\ 0{,}65806 = 0{,}438650 \text{ Quadratmeter.}$$

Inhalt des unteren Querschnittes:

$$A_3 = 0{,}66606.\ 0{,}65940 = 0{,}439200 \text{ Quadratmeter.}$$

Deshalb folgt ein zweiter mittlerer Werth des Querschnittes:

$$\frac{0{,}439515 + 4.\ 0{,}438650 + 0{,}439200}{6}$$

$$= \frac{2{,}633315}{6} = 0{,}438886 \text{ Quadratmeter.}$$

Wir können daher in der Folge folgenden Werth für den Querschnitt des Wasserkastens in Rechnung bringen:

$$A = \frac{0,438856 + 0,438886}{2}$$

$$= 0,43887 \text{ Quadratmeter.}$$

Wiewohl diese Bestimmung nur für die grössere Ausflussmenge vorgenommen worden ist, so lässt sich doch aus den Abweichungen der einzelnen Querschnitte von einander folgern und selbst durch eine einfache Rechnung nachweisen, dass dieser Querschnitt auch nur wenig von dem der kleineren Ausflussmenge abweiche und demnach diesem gleichgesetzt werden könne, und dies um so mehr, da gerade die Versuche mit kleineren Ausflussmengen diejenigen sind, welche auf weniger Genauigkeit Anspruch machen als die Versuche bei grösseren Ausflussmengen.

Bezeichnet

A den Querschnitt des Ausflussreservoirs,

a den Querschnitt der Ausflussmündung,

h_1 die Druckhöhe am Anfang,

h_2 die Druckhöhe am Ende der Beobachtungszeit, beide von der Marqueurspitze bis zur Mitte der Ausflussmündung gemessen,

ferner τ die Ausflusszeit, oder die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel von der obern Spitze (a) bis zur unteren (b) oder mittleren Spitze (c) sinkt,

$g = 9,809$ Meter die Beschleunigung der Schwere,

μ den Ausflusscoefficienten, oder das Verhältniss der effectiven Ausflussmenge zur theoretischen, so hat man

1) die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Nun ist aber die Ausflussmenge

$$A\,(h_1 - h_2) = \mu.\ a\ \sqrt{2gh}.\ \tau, \text{ daher folgt}$$

2) der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{A\,(h_1 - h_2)}{a\tau.\sqrt{2gh}}, \text{ wofür man allerdings gewöhnlicher}$$

$$= \frac{2A\,(h_1 - h_2)}{a\tau\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)} = \frac{2A\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)}{a\,\tau\sqrt{2g}}$$

schreibt.

Setzt man die der mittleren Ausflussgeschwindigkeit v entsprechende Druck- oder Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g} = 1$, so folgt

3) der dem Ausflusscoefficienten μ entsprechende Verlust an Druckhöhe oder der Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$, denn

für den Ausflusscoefficienten μ ist die Druckhöhe $= \frac{v^2}{2g\mu^2}$, und ist derselbe $=$ Eins, findet also kein Druckverlust statt, so ist die Druckhöhe $= \frac{v^2}{2g}$; es ist also die Differenz

beider Druckhöhen oder der Druckverlust, gemessen durch die Höhe einer Wassersäule,
$$= \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Bestimmung des Druckverlustes ist jedoch nur bei vollem Ausfluss, d. h. nur dann giltig, wenn der durch das prismatische Rohr ausfliessende Strahl das Rohr oder wenigstens dessen Ausmündung vollkommen ausfüllt, weil nur in diesem Falle der Ausflusscoefficient μ dem Geschwindigkeitscoefficienten φ gleichgesetzt werden kann. Fliesst dagegen das Wasser bei ungefülltem Querschnitte aus, nimmt also der ausfliessende Strahl nur einen Theil vom Querschnitte der Ausmündnng ein, so ist der Ausflusscoefficient ein Product aus dem Geschwindigkeitscoefficienten φ und dem Contractionscoefficienten α, es ist also $\mu = \varphi\alpha$; weshalb dann zur Bestimmung von φ noch besondere Geschwindigkeits- oder Querschnittsmessungen vorgenommen werden müssen, worauf wir uns jedoch hier nicht eingelassen haben. Aber auch noch in dem Falle, wenn das Wasser in nicht parallelen Fäden ausfliesst, also der Wasserstrahl conisch, oder wie ein Seil gewunden ist, welches zu beobachten wir oft Gelegenheit gehabt haben, ist es nicht gestattet, den Geschwindigkeitscoefficienten dem Ausflusscoefficienten gleichzusetzen. Wenn endlich der Ausfluss durch eine Mündung in der dünnen Wand erfolgt, so ist der Geschwindigkeitscoefficient = Eins oder nahe Eins, und daher der Contractionscoefficient dem Ausflusscoefficienten gleich anzunehmen. In diesem Falle findet also ein Druckverlust gar nicht statt, oder es ist derselbe wenigstens sehr unbedeutend. Es ist deshalb auch gar nicht zweckmässig, wenn man einem in das Freie fliessenden Strahl, dessen lebendige Kraft man zum Umtrieb einer Maschine benutzen will, die Contraction durch Abrunden und Ansetzen von Backen u. s. w. entziehen will, denn gerade dadurch erzeugt man einen, wenn auch vielleicht nur unbedeutenden Geschwindigkeits- und Druckverlust. Etwas ganz Anderes ist es beim vollen Ausfluss durch Röhren oder rings umschlossene Canäle, wo, wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung, beim Eintritt in dieselben der Druck um die Höhe $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ abnimmt.

Wir müssen unsere Versuche eintheilen in

Hauptversuche und

Nebenversuche.

Als Hauptversuche sind diejenigen anzusehen, welche über den Ausfluss durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angestellt worden sind und wodurch man in den Besitz ganzer Versuchsreihen gekommen ist. Die Nebenversuche hingegen betreffen den Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand, durch kürzere und längere, einfache und zusammengesetzte Röhren mit und ohne Verengungen. Die letzteren Versuche wurden angestellt, weil sich einmal die Gelegenheit dazu darbot und weil sie oft als Grundlagen für die Hauptversuche und als Anknüpfungspunkte für das seither Unbekannte mit dem schon Bekannten dienen konnten. Viele von diesen Versuchen geben nichts Neues, manche derselben aber möchten als Prüfungsmittel der Theorie zu betrachten sein, andere möchten selbst einige Lücken ausfüllen, und einige sogar können als die ersten Grundzüge zu einem neuen Gesetze über die Veränderlichkeit der Contractionscoefficienten angesehen werden, wie aus Folgendem zu ersehen sein wird.

I. Hauptversuche.

A. Versuche über den Ausfluss durch Schieber (Schubventile).

1) Rectangulärer Schieber im parallelepipedischen Rohre.

a) Einfaches Ausflussrohr.

Der Schieber befand sich in einem einfachen, inwendig gut polirten Messingrohr *AB* Fig. 20 Tafel I. von 32 Centimeter Länge, 5 Centimeter lichter Weite und $2\frac{1}{2}$ Centimeter lichter Höhe; er war 1 Millimeter dick und stand der Einmündung nur wenig näher als der Ausmündung. Übrigens schloss derselbe vollkommen wasserdicht ab, d. h. er liess weder Wasser durch die einen Aufsatz bildende Führung, noch durch das Rohr selbst, wenn er zugestellt war. Der Querschnitt der Ausmündung war genau

5,018 Centimeter lang und

2,478 Centimeter weit, hatte also den Inhalt

$a = 5{,}018 . 2{,}478 = 12{,}435$ Quadratcentimeter.

Nun ist aber der Inhalt des mittleren Querschnittes des Wasserkastens, aus welchem das Wasser floss:

$A = 4388{,}7$ Quadratcentimeter, und

$\sqrt{2g} = 4{,}4292$; es lässt sich daher ein für alle Mal

$\frac{2A}{\sqrt{2g}} = \frac{8777{,}4}{4{,}4292} = 1981{,}7$, oder

$\text{Log}\left(\frac{2A}{\sqrt{2g}}\right) = 3{,}2970430$, hier aber noch

$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}435} = 159{,}34$, so wie

$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}2023972$ setzen.

Es wurde ferner gefunden

die Druckhöhe am Anfang:

$h_1 = 0{,}7925 - 0{,}0124 = 0{,}7801$ Meter,

und die Druckhöhe am Ende:

$h_2 = 0{,}7801 - 0{,}3813 = 0{,}3988$ Meter.

Streng genommen sind allerdings diese Druckhöhen veränderlich und von der Stellung des Schiebers abhängig, da bei dem Niederschieben des anfänglich geöffneten Schiebers der Mittelpunkt M der Durchgangsöffnung allmählig um die halbe Höhe (0,0124 Meter) des Rohres tiefer sinkt. Allein eine solche Differenz giebt erst dann, wenn die Durchgangsöffnung sehr niedrig wird, eine Geschwindigkeitsdifferenz von circa 1 Procent, da nun aber gerade dann auch die Beobachtungsfehler einen viel grösseren Einfluss auf das Ergebniss ausüben, als wenn der Schieber noch wenig eingeschoben, also die Durchgangsöffnung sehr hoch ist, so ist man berechtigt, unter bewandten Umständen, diese allmählige Zunahme der Druckhöhe unberücksichtigt zu lassen. In der That, wenn beim Stellen des Schiebers Fehler von 0,1 Millimeter unvermeidlich sind, so gibt dies anfänglich, wo die Öffnungshöhe 20,5 Millimeter ist, nur einen Fehler von $\frac{1}{205}$; ist aber diese nur noch 2,05 Millimeter, so wird der Querschnitt, und deshalb auch der Ausflusscoefficient, um $\frac{10}{205} = \frac{2}{41}$, also nahe um 5 Procent unrichtig bestimmt.

Aus den obigen Druckhöhen folgt die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{0,7801} + \sqrt{0,3988}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{0,8832 + 0,6315}{2}\right)^2 = 0,574 \text{ Meter.}$$

Nun ist aber bei geöffnetem Schieber, also beim Ausfluss durch das einfache Rohr, die Ausflusszeit

$$t = 50 \text{ Secunden}$$

gefunden worden; es folgt daher für diesen der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{a t \sqrt{2g}} = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{t}$$

$$= 159,34 \left(\frac{0,8832 - 0,6315}{50}\right)$$

$$= 0,8023,$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{(0,8023)^2} - 1 = 0,554.$$

War der Schieber auf die Hälfte seines ganzen Weges gestellt, also die Durchgangsöffnung 12,5 Millimeter hoch, so wurde die Ausflusszeit 94½ Secunden gefunden, es ist demnach der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{159,34\ (0,8832 - 0,6315)}{94,5}$$

$$= 0,4245,$$

und der Widerstandscoefficient

$$\zeta_1 = \frac{1}{(0,4245)^2} - 1 = 4,549.$$

Zieht man hiervon den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0,554$ des einfachen Rohres ab, so erhält man den der Verengung unter dem Schieber entsprechenden Widerstandscoefficienten

$\zeta_1 - \zeta = 4{,}549 - 0{,}554$

$= 3{,}995$; welchem wieder der Ausflusscoefficient

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_1 - \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{4{,}995}} = 0{,}447 \text{ entspricht.}$$

Zur Berechnung der Widerstandscoefficienten aus den Ausflusscoefficienten, so wie umgekehrt zur Berechnung der Ausflusscoefficienten aus den entsprechenden Widerstandscoefficienten ist die am Ende beigefügte Tabelle (XXXIV.) zu gebrauchen.

Die Ergebnisse bei verschiedenen Stellungen des Schiebers sind in folgender Tabelle (I) zusammengestellt.

Tabelle I.

Coefficienten für den Ausfluss des Wassers durch rectanguläre Schieber im parallelepipedischen Rohre.

Stellhöhe des Schiebers in Centimetern.	Relativer Querschnitt der Verengung unter dem Schieber $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit in Secunden τ.	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
$2\frac{4}{8}$	1,00	50	0,8023 $= \mu$	1,554	0,000
$2\frac{3}{8}$	0,95	$50\frac{1}{4}$	0,7983	1,569	0,015
$2\frac{2}{8}$	0,90	$51\frac{1}{4}$	0,7828	1,632	0,078
$2\frac{1}{8}$	0,85	53	0,7569	1,746	0,192
2	0,80	56	0,7164	1,949	0,395
$1\frac{7}{8}$	0,75	$59\frac{1}{2}$	0,6742	2,200	0,646
$1\frac{6}{8}$	0,70	$63\frac{1}{2}$	0,6317	2,506	0,952
$1\frac{5}{8}$	0,65	$68\frac{1}{2}$	0,5856	2,916	1,362
$1\frac{4}{8}$	0,60	75	0,5349	3,495	1,941
$1\frac{3}{8}$	0,55	$84\frac{1}{2}$	0,4747	4,437	2,883
$1\frac{2}{8}$	0,50	$94\frac{1}{2}$	0,4245	5,549	3,995
$1\frac{1}{8}$	0,45	106	0,3864	6,982	5,428
1	0,40	$124\frac{1}{2}$	0,3222	9,632	8,078
$\frac{7}{8}$	0,35	146	0,2747	13,246	11,692
$\frac{6}{8}$	0,30	172 *)	0,2332	18,383	16,829
$\frac{5}{8}$	0,25	205 *)	0,1957	26,114	24,560
$\frac{4}{8}$	0,20	286 **)	0,1403	—	—
$\frac{3}{8}$	0,15	401 ***)	0,1000	—	—
$\frac{2}{8}$	0,10	586 ***)	0,0685	—	—
$\frac{1}{8}$	0,05	—			

*) unruhig, d. h. stossend und wallend, doch mit gefülltem Querschnitte ausfliessend.

**) anfänglich sehr unruhig ausfliessend; nach 185 Secunden hörte der volle Ausfluss ganz auf, das Wasser floss nur über der unteren Fläche der Röhre aus.

***) Ausfluss mit ungefülltem Querschnitte; das Wasser floss in einer dünnen Schicht über der unteren Fläche des Rohres.

Da schon bei einer Verengung, welche 0,3 des ganzen Röhrenquerschnittes ist, das regelmässige Ausfliessen, und bei 0,2 Verengung der volle Ausfluss ganz aufhörte, und es gleichwohl wünschenswerth ist, auch die Ausflussverhältnisse bei grösseren Verengungen zu kennen,

so musste an die Anwendung besonderer Mittel zur Hervorrufung eines regelmässigen vollen Ausflusses unter diesen Verhältnissen gedacht werden. Diese Mittel aber können in dem Anstossen einer längeren Ausflussröhre oder in dem Einsetzen eines die Ausflussmenge und also auch die Geschwindigkeit in der Röhre vermindernden Mundstückes bestehen. Hier wurde nur das erste Mittel angewendet, wie aus Folgendem zu ersehen ist.

b) Das vorige Rohr mit einer langen Ansatzröhre.

Es wurde an die Ausmündung des vorigen Schieberapparates eine ausgeschliffene 61 Centimeter lange Eisenröhre angestossen, wie ohngefähr aus Fig. 15 Taf. I. zu ersehen ist. Die Weite dieser Röhre war zwar eben so gross als die der messingenen Schieberröhre, allein kleine Abweichungen waren unvermeidlich; deshalb stellte sich denn auch bei Ausmessung der Ausmündung für die folgende zweite Versuchsreihe

die Weite 5,012 Centimeter
und die Höhe 2,494 Centimeter, folglich
der Inhalt $a = 5{,}012.\ 2{,}494 = 12{,}490$ Quadratcentimeter

heraus.

Es ist deshalb hier $\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}490} = 158{,}66$, so wie

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}2004806.$$

Die Druckhöhen waren wie bei der vorigen Versuchsreihe,

nämlich $h_1 = 0{,}7801$ Meter,
$h_2 = 0{,}3988$ „
$h = 0{,}574$ „

Deshalb ist denn hier

$$\mu = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\tau} = 158{,}66\ \frac{(0{,}8832 - 0{,}6315)}{\tau}$$

$$= \frac{158{,}66.\ 0{,}2517}{\tau} = \frac{39{,}936.}{\tau}$$

Bei völlig geöffnetem Schieber war die Ausflusszeit $\tau = 55\frac{1}{6}$ Secunden, folglich ist für den Ausfluss durch die blosse Röhrenverbindung

$$\mu = \frac{39{,}936}{55{,}166} = 0{,}7240 \text{ und}$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{0{,}7240}\right)^2 - 1 = 0{,}908.$$

Ohne die eiserne Ansatzröhre wurde $\zeta = 0{,}554$ gefunden; es folgt daher der Coefficient des Widerstandes in der eisernen Röhre $\zeta_1 = 0{,}908 - 0{,}554 = 0{,}354$.

Die Ergebnisse des Ausflusses bei verschiedenen Schieberstellungen enthält folgende Tabelle (II).

Tabelle II.

Coefficienten für den Ausfluss des Wassers durch rectanguläre Schieber im verlängerten parallelepipedischen Rohre.

Stellhöhe des Schiebers in Centimetern.	Relativer Querschnitt der Verengung unter dem Schieber $\left(\frac{a_1}{a}\right)$.	Ausflusszeit in Secunden.	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.	Contractionscoefficient α.
$2\frac{4}{8}$	1,00	$55\frac{1}{6}$	0,7240 = μ	1,908	0,000	1,000
$2\frac{3}{8}$	0,95	$55\frac{1}{3}$	0,7218	1,919	0,011	0,957
$2\frac{2}{8}$	0,90	$56\frac{1}{2}$	0,7069	2,001	0,093	0,851
$2\frac{1}{8}$	0,85	58	0,6886	2,109	0,201	0,812
2	0,80	$60\frac{1}{2}$	0,6602	2,295	0,387	0,771
$1\frac{7}{8}$	0,75	$63\frac{1}{2}$	0,6290	2,528	0,620	0,746
$1\frac{6}{8}$	0,70	$67\frac{1}{2}$	0,5917	2,856	0,948	0,724
$1\frac{5}{8}$	0,65	73	0,5471	3,341	1,433	0,700
$1\frac{4}{8}$	0,60	$79\frac{3}{4}$	0,5008	3,987	2,079	0,683
$1\frac{3}{8}$	0,55	$87\frac{1}{2}$	0,4565	4,800	2,892	0,673
$1\frac{2}{8}$	0,50	$97\frac{1}{4}$	0,4107	5,929	4,021	0,666
$1\frac{1}{8}$	0,45	109	0,3664	7,448	5,540	0,663
1	0,40	125	0,3195	10,024	8,116	0,650
$\frac{7}{8}$	0,35	$148\frac{1}{2}$	0,2689	13,825	11,917	0,642
$\frac{6}{8}$	0,30	$177\frac{1}{2}$	0,2250	19,752	17,844	0,638
$\frac{5}{8}$	0,25	214	0,1866	28,710	26,802	0,648
$\frac{4}{8}$	0,20	272	0,1468	46,381	44,473	0,652
$\frac{3}{8}$	0,15	378 *)	0,1056	89,575	87,667	0,643
$\frac{2}{8}$	0,10	$557\frac{1}{2}$ *)	0,0716	194,847	192,939	0,672
$\frac{1}{8}$	0,05	—	—	—	—	—

*) unregelmässig, d. i. wallend und stossend, jedoch voll ausfliessend.

Bei Vergleichung der hier gefundenen Widerstandscoefficienten (Columne No. 6) mit denen in Tab. I. aufgeführten Widerstandscoefficienten stellt sich eine befriedigende und für die praktische Anwendung genügende Übereinstimmung heraus. Z. B. bei 0,8 Verengung ist hier $\zeta = 0{,}387$, dort 0,395, bei 0,65 Verengung hier $\zeta = 1{,}433$, dort 1,362, bei 0,5 hier $\zeta = 4{,}021$, dort 3,995 u. s. w. gefunden worden. Die grössere Abweichung am Ende der Versuchsreihe, wo die Durchgangsöffnung sehr niedrig wird, ist aus schon angeführten Gründen erklärlich. In Fällen der Anwendung dieser Coefficienten möchte es rathsam sein, sich des arithmetischen Mittels aus beiden Werthen zu bedienen.

Die letzte Columne in der zweiten Tabelle ist zur Prüfung der Theorie hinzugefügt worden. Ist α der Contractionscoefficient beim Durchgang durch eine Verengung, und a_1 der Inhalt der Verengung, dagegen a, wie seither, der Inhalt des Querschnittes der Röhre, so hat man der Theorie zufolge den durch diese Verengung erzeugten Widerstandscoefficienten

$\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ zu setzen, weil αa_1 der Querschnitt der grössten Verengung und sonach $\frac{a}{\alpha a_1}$ das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit in demselben und der Geschwindigkeit in der Röhre ist.

Bezeichnen wir nun $\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ mit ζ, so erhalten wir den entsprechenden Contractionscoefficienten $\alpha = \frac{a}{a_1 (1 + \sqrt{\zeta})} = \frac{a}{a_1} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta}}$.

Setzt man nun die Werthe $\frac{a_1}{a}$ und ζ aus der zweiten und sechsten Columne hier ein, so ergeben sich die, verschiedenen Schieberstellungen entsprechenden Contractionscoefficienten, wie sie in der siebenten Columne aufgezeichnet sind. Ein blosser Blick auf diese Zusammenstellung zeigt, dass diese Coefficienten mit der Grösse der Verengung wachsen, dass also die Theorie zu grossen Irrthümern führt, wenn sie, wie gewöhnlich, den Contractionscoefficienten constant annimmt und denselben 0,62 setzt. Das letztere ist vielmehr nur gestattet, wenn der Querschnitt des verengten Durchganges sehr klein ist gegen den Querschnitt der Röhre; je grösser aber das Verhältniss dieser Querschnitte wird, desto grösser fällt auch der Contractionscoefficient aus. Unserer Versuchsreihe zufolge wächst der letztere von 0,64 bis 1,00.

2) Kreisrunder Schieber im cylindrischen Rohre.

Bei dem Schieber im runden Ausflussrohre bildet der verengte Querschnitt eine mondförmige Figur *AEBF* Fig. 21 Taf. I. Der Inhalt derselben hängt von der Stellhöhe $AB = h$ ab und lässt sich auf folgende Weise berechnen. Ist r der Halbmesser $CA = CE = CF$ des Röhrenquerschnittes und φ der Centriwinkel $EGF = ECF$ desjenigen Bogens *EBF* vom Schieber, welcher das durchfliessende Wasser begrenzt, so hat man

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}CG}{CE} = \frac{CH}{CE}, \text{ d. i.}$$

$$1) \cos\frac{\varphi}{2} = \frac{h}{2r}.$$

Der gesuchte Querschnitt $AEBF = a_1$ ist aber gleich dem Vollkreis *AEF* minus dem doppelten Segmente *EBF*, also $a_1 = \pi r^2 - r^2 (\varphi - \sin\varphi)$; es folgt also

$$2)\ a_1 = (\pi - \varphi + \sin\varphi)\, r^2.$$

Die letztere Formel wird noch einfacher, wenn man den Winkel $\psi = \pi - \varphi$ einführt; dann ist $\sin\varphi = \sin\psi$ und $\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\psi}{2}$, daher

$$1^*)\ \sin\frac{\psi}{2} = \frac{h}{2r} \text{ und}$$

$$2^*)\ \frac{a_1}{a} = \frac{\psi^0}{180^0} + \frac{\sin\psi}{\pi}.$$

a) Einfaches Ausflussrohr.

Der kreisrunde Schieber war 2 Millimeter dick und befand sich ziemlich in der Mitte eines einfachen inwendig polirten Messingrohres von $27\frac{1}{4}$ Centimeter Länge und 4 Centimeter

lichter Weite; er schloss, wiewohl er nicht geliedert war, vollkommen wasserdicht ab. Der Durchmesser der Ausmündung wurde 4,032 Centimeter gefunden, folglich war der Inhalt derselben:

$$a = \pi.\left(\frac{4,032}{2}\right)^2 = 12,768 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Deshalb ist hier

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981,7}{12,768} = 155,21 \text{, und}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2,1909201.$$

Die anfängliche Druckhöhe war

$$h_1 = 0,7960 - 0,0202 = 0,7758 \text{ Meter,}$$

die Druckhöhe am Ende des Ausflusses

$$h_2 = 0,7758 - 0,3815 = 0,3943 \text{ Meter,}$$

folglich die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0,8808 + 0,6279}{2}\right)^2 = 0,569 \text{ Meter.}$$

Endlich ist

$$\mu = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}.\frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{\tau} = \frac{155,21.\ 0,2529}{\tau}$$
$$= \frac{39,252}{\tau}.$$

Bei völlig geöffnetem Schieber war die Ausflusszeit

$\tau = 50\frac{1}{2}$ Secunden, daher ist

der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{39,252}{50,5} = 0,7772,$$

und der Widerstandscoefficient

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0,656.$$

Die Resultate bei verschiedenen Stellungen des Schiebers sind in folgender Tabelle (III) enthalten.

Tabelle III.

Coefficienten für den Ausfluss des Wassers durch kreisförmige Schieber im cylindrischen Rohre.

Stellhöhe des Schiebers in Centimetern (h).	Relative Stellhöhe des Schiebers $\left(\frac{h}{2r}\right)$ in Zweiunddreissigsteln.	Hilfswinkel (ψ) in Graden und Minuten.	Relativer Querschnitt der Verengung unter dem Schieber $\left(\frac{a_1}{a}\right)$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
4	32	180° 0′	1,000	50½	0,7771 $= \mu$	1,656	0,000
3⅞	31	151° 17′	0,993	50⅝	0,7752	1,664	0,008
3⁶⁄₈	30	139° 16′	0,981	50¾	0,7733	1,672	0,016
3⅝	29	129° 59′	0,966	51	0,7695	1,689	0,033
3⁴⁄₈	28	122° 5′	0,948	51½	0,7621	1,722	0,066
3⅜	27	115° 5′	0,928	52	0,7547	1,756	0,100
3²⁄₈	26	108° 41′	0,905	52¾	0,7440	1,807	0,151
3⅛	25	102° 45′	0,881	53½	0,7336	1,858	0,202
3	24	97° 11′	0,856	54¼	0,7234	1,911	0,255
2⅞	23	91° 54′	0,829	55½	0,7070	2,000	0,344
2⁶⁄₈	22	86° 52′	0,800	57	0,6885	2,109	0,453
2⅝	21	82° 2′	0,771	59½	0,6595	2,298	0,642
2⁴⁄₈	20	77° 22′	0,740	62¼	0,6305	2,516	0,860
2⅜	19	72° 51′	0,709	65	0,6038	2,743	1,087
2²⁄₈	18	68° 28′	0,677	68½	0,5729	3,046	1,390
2⅛	17	64° 11′	0,643	72½	0,5413	3,413	1,757
2	16	60° 0′	0,609	77⅙	0,5086	3,866	2,210
1⅞	15	55° 54′	0,574	83½	0,4700	4,527	2,871
1⁶⁄₈	14	51° 53′	0,539	90½	0,4337	5,317	3,661
1⅝	13	47° 56′	0,503	99	0,3964	6,363	4,707
1⁴⁄₈	12	44° 3′	0,466	109½ *)	0,3584	7,784	6,128
1⅜	11	40° 13′	0,429	120 *)	0,3271	9,349	7,693
1²⁄₈	10	36° 25′	0,391	{144½ **) {155½	0,2716} 0,2523}	—	—
1⅛	9	32° 40′	0,353	170 ***)	0,2309	—	—
1	8	28° 58′	0,315	196	0,2002	—	—
⅞	7	25° 16′	0,276	223	0,1760	—	—
⁶⁄₈	6	21° 37′	0,237	260	0,1509	—	—
⅝	5	17° 59′	0,198	303½	0,1293	—	—
⁴⁄₈	4	14° 22′	0,159	383	0,1024	—	—
⅜	3	10° 46′	0,119	510	0,0769	—	—
²⁄₈	2	7° 10′	0,080	758	0,0518	—	—
⅛	1	3° 35′	0,040	—	—	—	—

*) schwankend und divergirend ausfliessend.

**) der volle Ausfluss hörte auf
das erste Mal nach 76 Secunden,
das zweite Mal nach 11 Secunden.

***) bei diesem und den folgenden Versuchen füllte das ausfliessende Wasser den Röhrenquerschnitt nicht aus, sondern es hatte der ausfliessende Wasserstrahl ein Querprofil wie Fig. 23 Taf. I.

Vergleicht man die Ergebnisse in dieser Tabelle mit denen in der Tabelle I., so stellt sich allerdings heraus, dass bei gleichem Inhalte der Verengung der Druckverlust oder Widerstand

grösser ist in dem runden Rohre mit rundem Schieber als im parallelepipedischen Rohre mit rectangulärem Schieber. Z. B. für $\frac{a_1}{a} = 0,800$ ist unter dem runden Schieber $\zeta = 0,453$, unter dem rectangulären $= 0,395$; für $\frac{a_1}{a} = 0,500$ ist unter dem runden Schieber $\zeta = 4,620$, wie durch Interpolation leicht gefunden werden kann, während unter dem vierkantigen Schieber $\zeta = 3,995$ sich ergab u. s. w.

Bei dieser Versuchsreihe hörte schon der volle Ausfluss auf, als der Inhalt der Durchgangsöffnung noch circa 0,4 von dem Querschnitte der ganzen Röhre war; es war deshalb noch eine zweite Versuchsreihe mit langer Ansatzröhre nothwendig, wodurch ein volles Ausfliessen bei kleineren Verengungen erzielt werden konnte.

Wenn man die gefundenen Ausflusscoefficienten bei ungefülltem Röhrenquerschnitt durch die Inhalte der verengten Querschnitte dividirt, so bekommt man die entsprechenden Contractionscoefficienten. So geben denn die relativen Verengungen 0,353; 0,315; 0,276; 0,237; 0,198 u. s. w. die Contractionscoefficienten 0,654; 0,635; 0,638; 0,637; 0,653 u. s. w. Man kann hieraus schliessen, dass bei grossen Verengungen der Contractionscoefficient $\alpha = 0,64$ bis 0,65 und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{a}{0,64a_1} - 1\right)^2 \text{ bis } \left(\frac{a}{0,65a_1} - 1\right)^2$$

ist.

b) Das vorige Rohr mit einer längeren Ansatzröhre.

Um den vollen Ausfluss bei kleinen Durchgangsöffnungen zu erlangen, wurde an das äussere Ende der vorigen Ausflussröhre eine 60 Centimeter lange Eisenröhre angesteckt und die ganze Reihe der Versuche wiederholt. Der Durchmesser der Ausmündung dieser Röhre war 4,042 Centimeter, folglich der Inhalt derselben

$$a = \pi\,(2,021)^2 = 12,832 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Hiernach ist hier

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{19,817}{12,832} = 154,44, \text{ und}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2,1887486.$$

Die Druckhöhen waren die früheren, deshalb auch

$$\sqrt{h} - \sqrt{h_1} = 0,2529 \text{ und}$$

$$\mu = \frac{154,44.\ 0,2529}{\tau} = \frac{39,057}{\tau}$$

Bei völlig aufgezogenem Schieber, also für die blosse Röhrenverbindung, wurde $\tau = 55$ Secunden gefunden, weshalb nun folgt

$$\mu = \frac{39,057}{55} = 0,7100 \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0,984.$$

Folgende Tabelle (IV) enthält die Resultate der ganzen Versuchsreihe.

Tabelle IV.

Coefficienten für den Ausfluss des Wassers durch kreisförmige Schieber im verlängerten cylindrischen Rohre.

Stellhöhe des Schiebers (h) in Centimetern.	Relative Stellhöhe des Schiebers $\left(\frac{h}{2r}\right)$ in Zweiunddreissigsteln.	Hilfswinkel ψ in Graden und Minuten.	Relativer Querschnitt der Durchgangsöffnung $\left(\frac{a_1}{a}\right)$.	Ausflusszeit in Secunden.	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
4	32	180° 0′	1,000	55	0,7100 = μ	1,984	0,000
$3\frac{7}{8}$	31	151° 17′	0,993	$55\frac{1}{8}$	0,7084	1,993	0,009
$3\frac{6}{8}$	30	139° 16′	0,981	$55\frac{1}{4}$	0,7068	2,002	0,018
$3\frac{5}{8}$	29	129° 59′	0,966	$55\frac{1}{2}$	0,7036	2,020	0,036
$3\frac{4}{8}$	28	122° 5′	0,948	56	0,6973	2,057	0,073
$3\frac{3}{8}$	27	115° 5′	0,928	$56\frac{1}{2}$	0,6912	2,093	0,109
$3\frac{2}{8}$	26	108° 41′	0,905	$57\frac{1}{8}$	0,6839	2,140	0,156
$3\frac{1}{8}$	25	102° 45′	0,881	$57\frac{3}{4}$	0,6762	2,187	0,203
3	24	97° 11′	0,856	$58\frac{1}{4}$	0,6675	2,244	0,260
$2\frac{7}{8}$	23	91° 54′	0,829	$59\frac{1}{2}$	0,6563	2,322	0,338
$2\frac{6}{8}$	22	86° 52′	0,800	61	0,6402	2,440	0,456
$2\frac{5}{8}$	21	82° 2′	0,771	63	0,6199	2,603	0,619
$2\frac{4}{8}$	20	77° 22′	0,740	$65\frac{1}{4}$	0,5984	2,792	0,808
$2\frac{3}{8}$	19	72° 51′	0,709	68	0,5743	3,032	1,048
$2\frac{2}{8}$	18	68° 28′	0,677	71	0,5500	3,306	1,322
$2\frac{1}{8}$	17	64° 11′	0,643	$74\frac{1}{2}$	0,5242	3,640	1,656
2	16	60° 0′	0,609	$78\frac{1}{2}$	0,4975	4,041	2,057
$1\frac{7}{8}$	15	55° 54′	0,574	$84\frac{1}{4}$	0,4635	4,655	2,671
$1\frac{6}{8}$	14	51° 53′	0,539	$90\frac{3}{4}$	0,4303	5,401	3,417
$1\frac{5}{8}$	13	47° 56′	0,503	$98\frac{1}{2}$	0,3965	6,362	4,378
$1\frac{4}{8}$	12	44° 3′	0,466	107	0,3650	7,508	5,524
$1\frac{3}{8}$	11	40° 13′	0,429	118	0,3309	9,131	7,147
$1\frac{2}{8}$	10	36° 25′	0,391	$131\frac{1}{4}$	0,2975	11,296	9,312
$1\frac{1}{8}$	9	32° 40′	0,353	$146\frac{1}{2}$	0,2666	14,074	12,090
1	8	28° 58′	0,315	170	0,2297	18,951	16,967
$\frac{7}{8}$	7	25° 16′	0,276	199	0,1962	25,969	23,985
$\frac{6}{8}$	6	21° 37′	0,237	235	0,1662	36,214	34,230
$\frac{5}{8}$	5	17° 59′	0,198	280	0,1395	51,411	49,427
$\frac{4}{8}$	4	14° 22′	0,159	390	0,1001	99,787	97,803
$\frac{3}{8}$	3	10° 46′	0,119	495*)	0,0789	160,677	158,693
$\frac{2}{8}$	2	7° 10′	0,080	—	—	—	—
$\frac{1}{8}$	1	3° 35′	0,040	—	—	—	—

*) erst ruhig, nach 390 Secunden aber wallend und stossweise, nach 420 Secunden bei ungefülltem Querschnitte ausfliessend.

Bei Vergleichung der Widerstandscoefficienten, welche diese Tabelle angibt, mit denen in der IIIten Tabelle stellt sich eine erträgliche Übereinstimmung heraus. Z. B. für die Stellhöhe von 3 Centimeter, wo $\frac{a_1}{a} = 0{,}856$ ist, gibt Tab. III. $\zeta = 0{,}255$, dagegen Tab. IV. $\zeta = 0{,}260$; ferner für $h = 2$ Centimeter oder $\frac{a_1}{a} = 0{,}609$ gibt Tab. III. $\zeta = 2{,}210$, während nach

Tab. IV. $\zeta = 2{,}057$ ist u. s. w. Wenn gegen Ende der Versuchsreihe die Differenzen grösser ausfallen, so hat dies darin seinen Grund, dass dann wegen der Kürze der Röhre das Wasser unruhig und stossweise ausfliesst, während bei der längeren Röhre noch ein ruhiger regelmässiger Ausfluss statt hat. Bei kleinen Durchgangsöffnungen stimmt aber auch die Theorie mit den Erfahrungen mehr überein. Z. B. für $\frac{a_1}{a} = 0{,}315$ und $\alpha = 0{,}64$ ist der theoretisch bestimmte Widerstandscoefficient

$$\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{0{,}315 .\ 0{,}64} - 1\right)^2 = (3{,}96)^2 = 15{,}68,$$

während die Versuche $\zeta = 16{,}967$ gegeben haben; für $\frac{a_1}{a} = 0{,}198$ ist theoretisch

$$\zeta = \left(\frac{1}{0{,}198 .\ 0{,}64} - 1\right)^2 = (6{,}89)^2 = 47{,}47,$$ während nach Tabelle IV. $\zeta = 49{,}427$ gefunden wird.

Der Widerstandscoefficient für das eiserne Röhrenstück ist die Differenz der aus den Tabellen III. und IV. genommenen Werthe von $\frac{1}{\mu^2}$, also $= 1{,}984 - 1{,}656 = 0{,}328$. Für die nur 1 Centimeter längere parallelepipedische Röhre wurde er $= 0{,}354$ gefunden. Diese Differenz wird aber erklärlich, wenn man berücksichtigt, dass beide Röhren bei gleichem Inhalte ein Umfangsverhältniss wie 12,56 : 15 zu einander haben.

B. Versuche über den Ausfluss durch Hähne.

1) Hahn mit vierkantiger (rectangulärer) Bohrung im parallelepipedischen Rohre.

Der Apparat zu den Versuchen über den Ausfluss des Wassers aus Hähnen ist in Fig. 1 und Fig. 2 Taf. II. abgebildet. Fig. 1 ist der vertikale Längendurchschnitt, Fig. 2 aber der Grundriss. Das Messingrohr *AB*, worin sich das Hahngehäuse befand, war 30 Centimeter lang und im Lichten 5 Centimeter hoch und $2\frac{1}{2}$ Centimeter weit. Der Hahn *CD* hatte die beiden äusseren Halbmesser $r_1 = 2{,}56$ Centimeter und $r_2 = 2{,}27$ Centimeter, also den mittleren $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{4{,}83}{2} = 2{,}415$ Centimeter. Die Bohrung desselben war, wie der Querschnitt des Rohres, 5 Centimeter hoch und 2 Centimeter weit. Zum Drehen oder Stellen des Hahnes diente der vierseitige Schaft *E*, welcher durch einen gewöhnlichen Schraubenschlüssel erfasst werden konnte. Um aber den Drehwinkel anzugeben, oder den Hahn auf einen gewissen Winkel stellen zu können, wurde die in Grade eingetheilte Messingscheibe *FG* mit ihrer conischen Hülse auf das ebenfalls conisch abgedrehte Kopfstück *H* des Hahnes geschoben und mit diesem durch die Pressschraube *K* fest verbunden. Der Weiser oder Zeiger *LM*, dessen Einrichtung aus den Figuren deutlich ersehen werden kann, ist durch zwei Schräubchen mit dem messingenen

Ausflussrohre fest verbunden. Bei den Versuchen war der eingetheilte Kreis so gestellt, dass der Zeiger auf Null stand, wenn der Hahn dem Wasser freien Durchgang liess, also das Wasser gleichsam nur durch eine einfache Röhre ausfloss. In der Regel drehte man den Hahn nach und nach von $2\frac{1}{2}$ zu $2\frac{1}{2}$ Grad weiter, und es wurden bei jeder dieser Stellungen mindestens zwei Versuche gemacht. Genauere Resultate erlangt man, wenn man bei jedem Versuche neu einstellt und dann aus den einerlei Stellungen entsprechenden Ausflusszeiten, wenn diese nur wenig von einander abweichen, das arithmetische Mittel nimmt, weil man dann auch den Einfluss der ungenauen Einstellung auf das Ergebniss herabzieht. Noch genauer wird aber das letztere bei drei und mehrmaligem Einstellen, Ablesen und Beobachten bei einem und demselben Winkel, was, wenn es dem Zwecke entsprechend gefunden wurde, nicht unterblieb.

Um sich eine genaue Einsicht in die mathematischen Verhältnisse des Ausflusses bei verschiedenen Hahnstellungen zu verschaffen, ist es nöthig, die, verschiedenen Stellungen des Hahnes entsprechenden, Querschnitte der Durchgangsöffnungen zu kennen. Wir müssen daher zunächst eine Gleichung zwischen dem Stellungswinkel (φ) und dem entsprechenden Querschnitt (a_1) oder Querschnittsverhältnisse $\left(\frac{a_1}{a}\right)$ der Durchgangsöffnung oder Hahnverengung entwickeln. Fig. 3 ist der übrigens ohne Maassstab gezeichnete Auf- und Grundriss eines solchen Hahnes. Es sei

$r_1 = CA = CL$ (s. Grundriss) der obere oder grössere Hahnhalbmesser,

$r_2 = CD = CH$ der untere oder kleinere Hahnhalbmesser und

$r = \frac{r_1 + r_2}{2} = CK$ der mittlere Hahnhalbmesser.

Setzt man die halbe Differenz

$\frac{r_1 - r_2}{2} = \Delta$, so hat man auch

$r_1 = r + \Delta$ und

$r_2 = r - \Delta$.

Für unseren Hahn wurde $r_1 = 2{,}56$ und $r_2 = 2{,}27$ gefunden; daher folgt für denselben $\Delta = \frac{2{,}56 - 2{,}27}{2} = \frac{0{,}29}{2} = 0{,}145$ Centimeter.

Es sei ferner

$h = MO$ (s. Aufriss) die Höhe der Bohrung (auch lichte Höhe des Rohres), und

$b = CF = CG$ (s. Grundriss) die halbe Weite derselben (auch die halbe lichte Weite des Rohres).

Die Auflösung eines rechtwinkeligen Dreieckes CFL gibt die halbe Tiefe

$y = FL$ der Bohrung an der dicksten Stelle durch die Formel

$$y_1 = \sqrt{r_1^2 - b^2},$$

und auf gleiche Weise findet sich die halbe Tiefe (FH) der Bohrung an der dünnsten Stelle

$$y_2 = \sqrt{r_2^2 - b^2},$$

endlich die halbe Tiefe (FK) in der Mitte

$$y = \sqrt{r^2 - b^2}.$$

Führt man nun die Formeln $r_1 = r + \Delta$ und $r_2 = r - \Delta$ ein, so folgt auch

$$y_1 = \sqrt{(r+\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{r^2 - b^2 + 2r\Delta + \Delta^2}; \text{ so wie}$$
$$y_2 = \sqrt{(r-\Delta)^2 - b^2} = \sqrt{r^2 - b^2 - 2r\Delta + \Delta^2}.$$

Da der Hahn immer nur eine geringe Conicität besitzt, so ist Δ sehr klein gegen r, und es lassen sich daher die Potenzen von Δ, oder wenigstens die Cuben, Biquadrate u. s. w. von Δ der Null gleich setzen. Hiernach folgt nun

$$y_1 = \sqrt{r^2 - b^2} + \frac{2r\Delta + \Delta^2}{2\sqrt{r^2 - b^2}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4r^2\Delta^2}{\sqrt{(r^2 - b^2)^3}}, \text{ und}$$
$$y_2 = \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{2r\Delta - \Delta^2}{2\sqrt{r^2 - b^2}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4r^2\Delta^2}{\sqrt{(r^2 - b^2)^3}}.$$

Nach der *Simpson*'schen Regel ist endlich das Mittel aus y_1, y und y_2:

$$\frac{y_1 + 4y + y_2}{6} = \frac{6\sqrt{r^2 - b^2} + \frac{\Delta^2}{\sqrt{r^2 - b^2}} - \frac{r^2\Delta^2}{\sqrt{(r^2 - b^2)^3}}}{6}$$
$$= \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{b^2\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \sqrt{r^2 - b^2}\left(1 - \frac{b^2\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right).$$

Bei Drehung des Hahnes um den Winkel $\varphi = FCF_1 = LCL_1$ geht $FL = y$ in die Lage F_1L_1 über und es wird die Projection von y parallel zum Querschnitt FG, also $F_1Q = F_1L_1 \sin F_1L_1Q = y \sin\varphi$.

Addirt man hierzu die Projection $FP = CF - CP = CF - CF_1 \cos\varphi = b(1 - \cos\varphi)$, so bekommt man die Breite desjenigen Theiles vom Querschnitte $FG = 2b$ der Röhre, welcher durch die Drehung des Hahnes um den Winkel φ verschlossen wird; und es bleibt demnach als Breite des noch unverschlossenen Theiles übrig:

$$L_1R = 2b - (b(1 - \cos\varphi) + y\sin\varphi)$$
$$= b(1 + \cos\varphi) - y\sin\varphi.$$

Der Theil $b(1 + \cos\varphi)$ ist auf der ganzen Höhe $MO = h$ (Aufriss) unveranderlich und entspricht daher einem Querschnitte von dem Inhalte

$$bh\,(1 + \cos\varphi).$$

Anders ist es aber mit dem Theile $y\sin\varphi$; dieser ist an jeder Stelle der Höhe ein anderer, denn y ist die Ordinate eines Kegelschnittes parallel zur Axe des Kegels (Hahnes), also die einer Hyperbel. Da aber der Hahnconus nur wenig von einem Cylinder abweicht, so kann man sich des vorher gefundenen mittleren Ordinatenwerthes bedienen und den Querschnitt des zweiten Theiles setzen

$$\left(\frac{y_1 + 4y + y_2}{6}\right)h = h\sqrt{r^2 - b^2}\left(1 - \frac{b^2\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right).$$

Es ist folglich der Inhalt des Querschnittes der dem Drehungswinkel φ entsprechenden Verengung im Hahne:

$$1)\quad a_1 = \left\{ b(1 + \cos\varphi) - \sqrt{r^2 - b^2}\left(1 - \frac{b^2\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right)\sin\varphi \right\}$$

und das Verhältniss

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a_1}{2bh} = \frac{1 + \cos\varphi}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 1}\,.\left(1 - \frac{b^2\,\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right)\sin\varphi$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\left(\frac{r}{b}\right) - 1}\,.\left(1 - \frac{b^2\,\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right).$$

Die eben gefundene Formel gilt aber nur so lange als das Querprofil der Durchgangsöffnung vierseitig ist, oder der Hyperbelbogen $H_1 K_1 L_1$, welcher die Öffnung auf der einen Seite begrenzt, die Seitenfläche *MO* des Rohres noch nicht schneidet, weil nur dann die Höhe unveränderlich, nämlich $= h$ ist. Wird aber die Drehung weiter fortgesetzt, nimmt also das Querprofil der Durchgangsöffnung eine dreiseitige Gestalt an, so ist die Höhe kleiner als h und fällt um so kleiner aus, je weiter man die Drehung fortsetzt, bis sie endlich beim gänzlichen Abschluss des Hahnes verschwindet. Die Figur zeigt eine Stellung, wo die Durchgangsöffnung die dreiseitige Form noch nicht angenommen hat. Es kann hiernach der Drehwinkel φ drei ausgezeichnete Werthe annehmen. Fällt die Durchgangsöffnung mit dem Querschnitte des Hahnes zusammen, ist also $\frac{a_1}{a} = 1$, so hat man $\varphi = 0$. Geht das Querprofil der Durchgangsöffnung aus der vierseitigen Gestalt in die dreiseitige über, so möge der entsprechende Drehwinkel mit α bezeichnet werden, und verschwindet endlich der Durchgang gänzlich, tritt also ein Abschliessen des Hahnes ein, so möge er das Zeichen β erhalten.

Der Drehwinkel α ist in der Figur durch den Winkel *LCO* repräsentirt, und es ist aus dieser leicht zu entnehmen, dass

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{r_1}$ gesetzt werden kann; während β

durch $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{r_2}$ bestimmt wird.

Ist nun φ grösser als α und kleiner als β, also die Durchgangsöffnung dreiseitig, so fällt der Radius an der oberen Stelle dieser Öffnung

$\varrho_1 = \dfrac{b}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ aus, während der untere Radius unverändert

$\varrho_2 = r_2 = \dfrac{b}{\sin\frac{\beta}{2}}$ bleibt.

Wir können hiernach den mittleren Radius für die dreiseitige Durchgangsöffnung setzen:

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = \frac{b}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right).$$

Die Höhe h_1 dieser Öffnung bestimmt sich aus der Höhe h der ganzen Bohrung durch die Proportion $\frac{h_1}{h} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{r_1 - r_2}$, wogegen die untere Breite vom Querprofile dieser Verengung durch den Ausdruck

$\left(\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho_2^2 - b^2}\right)\sin\varphi$, und die Breite in der halben Höhe durch

$\left(\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho^2 - b^2}\right)\sin\varphi$ bestimmt wird.

Folglich ist nach der *Simpson*'schen Regel die mittlere Breite

$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho^2 - b^2}\right)\sin\varphi + \left(\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho_2^2 - b^2}\right)\sin\varphi\right)$$

$$= \left(5\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho_2^2 - b^2} - 4\sqrt{\varrho^2 - b^2}\right)\frac{\sin\varphi}{6}$$; und der Inhalt des Querprofils des dreiseitigen Hahndurchganges:

$$2)\ a_1 = \left(5\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho_2^2 - b^2} - 4\sqrt{\varrho^2 - b^2}\right).\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{r_1 - r_2}.\frac{h\sin\varphi}{6}.$$

Führt man noch

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = \Delta$$ und

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2} = \delta$$ ein, so bekommt man

$$\sqrt{\varrho^2 - b^2} = \sqrt{\varrho_2^2 - b^2} + \frac{2\varrho_2\delta + \delta^2}{2\sqrt{\varrho_2^2 - b^2}} - \frac{1}{8}.\frac{4\varrho_2^2\delta^2}{(\varrho_2^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$ und

$$\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} = \sqrt{\varrho_2^2 - b^2} + \frac{4\varrho_2\delta + 4\delta^2}{2\sqrt{\varrho_2^2 - b^2}} - \frac{1}{8}.\frac{16\varrho_2^2\delta^2}{(\varrho_2^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}},$$

daher auch

$$3)\ a_1 = \frac{\delta^2 h\sin\varphi}{\Delta\sqrt{\varrho_2^2 - b^2}}\left(\varrho_2 - \frac{4}{3}.\frac{b^2\delta}{\varrho_2^2 - b^2}\right).$$

Aus den durch Messung gefundenen Werthen

$b = 1{,}25,$

$r_1 = 2{,}56$ und

$r_2 = 2{,}27$ Centimeter folgt

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}25}{2{,}56}$, hiernach $\beta = 58^\circ\ 27'$, so wie

$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1{,}25}{2{,}27}$, folglich $\alpha = 66^\circ\ 49'$.

Beide Winkel wurden auch ohngefähr durch Messung mit dem eingetheilten Kreise gefunden, wenigstens konnte man beobachten, dass bei ohngefähr $58\frac{1}{2}$ Grad Drehung die Durchgangsöffnung dreiseitig wurde und dass sie bei circa $66\frac{3}{4}$ Grad verschwand

Der Querschnitt der Verengung im Hahne bei $58\frac{1}{2}$ Grad Drehung ist, nach der ersten Formel $\varphi = \alpha$ gesetzt,

$$a_2 = 2bh\left(\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - b^2}.\sin\alpha}{2b}\left(1 - \frac{b^2\Delta^2}{6(r^2 - b^2)^2}\right)\right)$$

$$= 2bh\left\{\frac{1{,}52324}{2} - \sqrt{\left(\frac{4{,}83}{2{,}50}\right)^2 - 1}.\frac{0{,}85218}{2}\left(1 - \frac{(0{,}145)^2}{9{,}375\left(\left(\frac{4{,}83}{2{,}50}\right)^2 - 1\right)}\right)\right\}$$

$$= 2bh\left\{0{,}76162 - 0{,}42609\sqrt{2{,}7326}\left(1 - \frac{0{,}0035}{(2{,}7326)^2.9{,}375}\right)\right\}$$

$$= 2bh\,[0{,}76162 - 0{,}70434\,(1 - 0{,}0003)]$$

$$= 2bh\,(0{,}05728 + 0{,}00021)$$

$$= 0{,}05749.\ 2bh$$, also

$\frac{a_1}{a} = 0,05749.$

Die zweite Formel gibt, wenn man in ihr $\delta = \Delta$ und $\varphi = \alpha$ setzt,

$$\frac{a_1}{a} = (5\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} - \sqrt{\varrho_2^2 - b^2} - 4\sqrt{\varrho^2 - b^2})\ \frac{\sin\alpha}{12b}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{\varrho_1^2 - b^2} = \sqrt{(2,56)^2 - (1,25)^2} = \sqrt{4,9911} = 2,23408,$$

$$\sqrt{\varrho^2 - b^2} = \sqrt{(2,415)^2 - (1,25)^2} = \sqrt{4,2697} = 2,06632, \text{ und}$$

$$\sqrt{\varrho_2^2 - b^2} = \sqrt{(2,27)^2 - (1,25)^2} = \sqrt{3,5904} = 1,89483; \text{ es folgt daher}$$

$$\frac{a_1}{a} = (5.\ 2,23408 - 4.\ 2,06632 - 1,89483)\ \frac{\sin 58^\circ\ 27'}{6.\ 2,5}$$

$$= (11,17040 - 8,26528 - 1,89483)\ \frac{0,85218}{15}$$

$$= \frac{1,01029.\ 0,85218}{15}$$

$$= 0,057397.$$

Endlich gibt die dritte Formel

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\Delta \sin\alpha}{2b\sqrt{r_2^2 - b^2}}\left(r_2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{b^2\,\Delta}{r_2^2 - b^2}\right).$$

Aber

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{b^2\,\Delta}{r_2^2 - b^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{0,145.\ 1,5625}{3,5904} = 0,08414,$$

daher

$$\frac{a_1}{a} = \frac{0,145.\ 0,85218}{2,5\sqrt{3,5904}}\cdot 2,18586$$

$$= 0,05702.$$

Die Abweichungen dieser drei Resultate von einander sind weit unter dem Grade der Genauigkeit, welcher beim Einstellen bei solchen kleinen Verengungen überhaupt möglich ist.

Die allen übrigen Stellungen des Hahnes entsprechenden Inhalte der Durchgangsöffnungen sind in der zweiten Columne der folgenden Tabelle mit aufgenommen. Die gewonnenen Resultate gelten zwar nur für die zum Grunde gelegte Conicität des Hahnes; da indessen die Conicität der Hähne überhaupt nicht gross ist und bei nicht sehr kleinen Durchgangsöffnungen auch ihr Einfluss unbedeutend wird, wie aus der ersten der obigen Berechnungen ersehen werden kann, so kann man in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung die in den folgenden Tabellen aufgeführten, verschiedenen Stellwinkeln entsprechenden Querschnittsverhältnisse für jeden vierkantig gebohrten Hahn gebrauchen, wenn nur das Verhältniss $\left(\frac{r}{b}\right)$ zwischen dem mittleren Durchmesser und der Weite der Bohrung dasselbe, nämlich $= 1,932$ ist.

a) Ausfluss durch das einfache Hahnrohr.

Die Ausmündung des 30 Centimeter langen Hahnrohres war genau 5,00 Centimeter weit und 2,48 Centimeter hoch, folglich mass der Inhalt derselben:

$a = 5 . 2{,}48 = 12{,}40$ Quadratcentimeter, und sonach

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}40} = 159{,}82.$$

Es wurde ferner gefunden

$$h_1 = 0{,}7850 - 0{,}0250 = 0{,}760 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0{,}76 - 0{,}358 = 0{,}402 \text{ Meter, daher}$$

$$h = \left(\frac{0{,}8718 + 0{,}6340}{2}\right)^2 = 0{,}567 \text{ Meter}.$$

Deshalb ist die Formel für die Ausflusscoefficienten folgende:

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{a\tau\sqrt{2g}} = \frac{159{,}82\ (0{,}8718 - 0{,}6340)}{\tau}$$

$$= \frac{159{,}82 . 0{,}2378}{\tau} = \frac{38{,}004}{\tau}.$$

Bei vollkommen geöffnetem Hahne war die Ausflusszeit $\tau = 48{,}25$ Secunden, daher folgt für diesen Fall

$$\mu = \frac{38{,}004}{48{,}25} = 0{,}7876 \text{ und}$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{0{,}7876}\right)^2 - 1 = 0{,}612.$$

Folgende Tabelle (V) enthält die gewonnenen Resultate bei den verschiedenen Hahnstellungen.

Tabelle V.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierseitig gebohrte Hähne im parallelepipedischen Rohre bei gefülltem Querschnitte des letzteren.

Stellwinkel (φ) in Graden.	Relativer Querschnitt $\left(\frac{a_1}{a}\right)$ des verengten Durchganges.	Ausflusszeit in Secunden.	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	$48\frac{1}{4}$	0,7875 = μ	1,612	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,963	$48\frac{1}{2}$	0,7834	1,629	0,017
5	0,926	49	0,7754	1,663	0,051
$7\frac{1}{2}$	0,888	50	0,7599	1,732	0,120
10	0,849	52	0,7307	1,873	0,261
$12\frac{1}{2}$	0,809	55	0,6908	2,095	0,483
15	0,769	59	0,6440	2,411	0,799
$17\frac{1}{2}$	0,728	64	0,5937	2,837	1,225
20	0,687	70	0,5428	3,394	1,782
$22\frac{1}{2}$	0,646	77	0,4935	4,107	2,495
25	0,604	85	0,4470	5,004	3,392
$27\frac{1}{2}$	0,562	94	0,4042	6,120	4,508
30	0,520	105	0,3619	7,636	6,024
$32\frac{1}{2}$	0,478	118	0,3106	9,644	8,032
$33\frac{3}{4}$	0,457	126	0,3016	11,022	9,410

Bei der Stellung von $33\frac{1}{4}^0$ floss das Wasser sehr unregelmässig, wallend und stossweise aus, und bei höherer Stellung konnte ein voller Ausfluss nicht einmal erlangt werden. In dem letzteren Falle darf daher eigentlich der Ausflusscoefficient gar nicht auf die Hahnmündung, sondern er muss auf den kleinsten Querschnitt der Hahnbohrung bezogen werden; von einem Druckverluste, oder von einer Widerstandshöhe ζ kann also auch nicht die Rede sein, wohl aber statt dessen von einem Contractionscoefficienten. Nur wegen Vergleichung mit den übrigen und namentlich mit den vorausgegangenen Versuchen sind zuerst in der vierten Columne der folgenden Tabelle VI. die der Ausmündung des Hahnrohres entsprechenden Ausflusscoefficienten (μ_1) aufgeführt. Aus diesen wurden aber durch die Formel $\alpha_1 = \left(\frac{a}{a_1}\right) \mu_1$ die der Hahnbohrung entsprechenden Ausflusscoefficienten (α_1) berechnet und in der fünften Columne zusammengestellt. Da aber die Röhre selbst einen Widerstand gibt, der annähernd durch die Formel $(1 - \mu^2) \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = \zeta \left(\frac{a_1}{a}\right)^2$ bestimmt wird, so lässt sich der der Hahnmündung allein zukommende Ausfluss- oder Contractionscoefficient (α) aus der Gleichung

$$\frac{1}{\alpha_1^{\,2}} - \frac{1}{\alpha^2} = \zeta \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \text{ bestimmen, welche}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{\,2}} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2}}$$

gibt.

Zur Bestimmung dieser Coefficienten sind noch die sechste, siebente, achte und neunte Columne in folgender Tabelle, welche die Werthe von $\frac{1}{\alpha_1^{\,2}}$, $\zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$, $\frac{1}{\alpha_1^{\,2}} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$ und α enthalten, zugefügt worden.

Wir haben bereits ermittelt:

$$\text{für } \varphi = 0^0,\ \mu = 0{,}7875,\ \frac{1}{\mu^2} = 1{,}612,\ \text{daher } \zeta = 0{,}612.$$

Bei 40^0 Drehung, wo $\frac{a_1}{a} = 0{,}352$ ist, wurde dagegen $t = 194$ Sec. gefunden, daher ist für diese Hahnstellung

$$\mu_1 = \frac{38{,}004}{194} = 0{,}1959,$$

$$\alpha_1 = \frac{0{,}1959}{0{,}352} = 0{,}5566,$$

$$\frac{1}{\alpha_1^{\,2}} = 3{,}228,$$

$\zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0{,}612.\ (0{,}352)^2 = 0{,}076$, und endlich der der Hahnbohrung allein zukommende Ausfluss- oder Contractionscoefficient

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3{,}228 - 0{,}076}} = \sqrt{\frac{1}{3{,}152}} = 0{,}563$$

Die Coefficienten bei anderen Hahnstellungen enthält folgende Tabelle.

Tabelle VI.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierseitig gebohrte Hähne im parallelepipedischen Rohre, bei ungefülltem Querschnitt des Rohres.

Drehwinkel (φ).	Relativer Querschnitt $\left(\frac{a_1}{a}\right)$ des Hahndurchganges.	Ausflusszeit (τ).	Ausflusscoefficient μ.	Ausflusscoefficient $\alpha_1 = \mu\left(\frac{a}{a_1}\right)$.	Ausdruck $\frac{1}{\alpha_1^2}$.	Ausdruck $\zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$.	Differenz $\frac{1}{\alpha_1^2} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$.	Contractionscoefficient (α).
0	1,000	48½	0,7875	0,7875	1,612	0,612	1,000	1,000
		137*)	0,2774	0,6367				
35	0,436	140**)	0,2715	0,6231				
		144***)	0,2639	0,6058				
37½	0,394	170****)	0,2235	0,5677	3,103	0,095	3,008	0,577
40	0,352	194	0,1959	0,5566	3,228	0,076	3,152	0,563
42½	0,310	223	0,1704	0,5489	3,319	0,059	3,260	0,554
45	0,269	259	0,1467	0,5448	3,370	0,044	3,326	0,548
47½	0,229	309	0,1230	0,5379	3,456	0,032	3,424	0,540
50	0,188	374	0,1016	0,5392	3,439	0,022	3,417	0,541
52½	0,149	464	0,0819	0,5503	3,302	0,014	3,288	0,552
55	0,110	604	0,0629	0,5724	3,052	0,007	3,045	0,573
60	0,027	1658	0,0229	0,8519	unsicher	—	—	—

*) der volle Ausfluss hörte auf nach 105 Secunden.
**) " " " " " " 89 "
***) " " " " " " 65 "
****) " " " " " " 20 "

Die nämlichen Versuche wurden auch bei kleineren Niveauabständen wiederholt und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle (VII) zusammengestellt. Hierbei war

$$h_1 = 0{,}785 - 0{,}025 = 0{,}760 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0{,}760 - 0{,}123 = 0{,}637 \text{ Meter, daher}$$

$$h = \left(\frac{0{,}8718 + 0{,}7981}{2}\right)^2 = 0{,}835^2 = 0{,}697 \text{ und}$$

$$\mu = \frac{159{,}82.\ 0{,}0737}{\tau} = \frac{11{,}772}{\tau}.$$

Bei $\varphi = 40^\circ$ ergab sich $\tau = 61$ Secunden, daher ist für diese Stellung

$$\mu_1 = \frac{11{,}772}{61} = 0{,}1930, \text{ ferner}$$

$$\alpha_1 = \frac{0{,}1930}{0{,}352} = 0{,}5484,$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = 3{,}325,$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 3{,}325 - 0{,}076 = 3{,}249.$$

Es folgt der gesuchte Contractions- oder Ausflusscoefficient für die blosse Hahnbohrung:

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3,249}} = 0,555$, während wir bei grösseren Niveauabständen und bei einer kleineren mittleren Druckhöhe 0,563 gefunden haben.

Die Ausflusscoefficienten für die übrigen Hahnstellungen enthält folgende Tabelle (VII).

Tabelle VII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierseitig gebohrte Hähne im parallelepipedischen Rohre bei 0,697 Meter mittlerer Druckhöhe.

φ	$\frac{a_1}{a}$	r	μ_1	$\frac{1}{\mu_1^2}$	ζ
30	0,520	$32\frac{3}{4}$	0,3595	7,740	6,128
$32\frac{1}{2}$	0,478	$36\frac{1}{2}$	0,3225	9,613	8,001
$33\frac{3}{4}$	0,457	$38\frac{1}{2}$	0,3058	10,696	9,084
35	0,436	$47\frac{1}{2}$	0,2478	16,281	14,669

				α_1	$\frac{1}{\alpha_1^2}$	$\zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$	$\frac{1}{\alpha_1^2} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2$	α
$37\frac{1}{2}$	0,394	$53\frac{3}{4}$	0,2190	0,5563	3,231	0,095	3,136	0,565
40	0,352	61	0,1930	0,5484	3,325	0,076	3,249	0,555
$42\frac{1}{2}$	0,310	70	0,1682	0,5418	3,407	0,059	3,348	0,547
45	0,269	$81\frac{1}{4}$	0,1449	0,5380	3,455	0,044	3,411	0,542
$47\frac{1}{2}$	0,229	97	0,1214	0,5308	3,548	0,032	3,516	0,533
50	0,188	$117\frac{1}{2}$	0,1002	0,5318	3,536	0,022	3,514	0,533
$52\frac{1}{2}$	0,149	$148\frac{1}{2}$	0,0793	0,5329	3,523	0,014	3,509	0,534
55	0,110	$201\frac{1}{2}$	0,0584	0,5316	3,539	0,007	3,532	0,532
$57\frac{1}{2}$	0,072	298	0,0395	0,5502	3,303	0,003	3,300	0,550
60	0,027	617	0,0191	0,7093	unsicher	—	—	—

Bei den ersten 4 Versuchen (30°, $32\frac{1}{2}$°, 35° und $37\frac{1}{2}$° Drehung) fand voller Ausfluss statt, bei $37\frac{1}{2}$° und mehr Drehung füllte das ausfliessende Wasser das Rohr nicht aus.

Die Querschnitte des Wasserstrahles bei $37\frac{1}{2}$°, 55° und 60° sind durch *a*, *b*, *c* Fig. 4 Taf. II. repräsentirt.

Die in dieser Tabelle zusammengestellten Ergebnisse stimmen mit denen der vorigen und mit denen der folgenden gut zusammen. Z. B. für $\varphi = 32\frac{1}{2}°$ ist hiernach $\zeta = 8,001$, nach Tab. V. aber $\zeta = 8,032$. Ferner die gewonnenen Ausflusscoefficienten sind hier 0,532 bis 0,565, in Tab. VI. hingegen 0,540 bis 0,577. Es ist übrigens eine Thatsache, dass der grösseren Druckhöhe (0,697 Meter) kleinere Ausflusscoefficienten zukommen, als der kleineren Druckhöhe (0,567 Meter). Die kleine Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten in der letzten Columne ist nicht dem blossen Zufall oder der Unvollkommenheit der Beobachtungen beizumessen, denn das allmählige Abnehmen und spätere Steigen dieser Coefficienten, welches wir schon bei den Schiebern beobachtet haben, hat sicherlich seinen Grund darin, dass der Ausflusscoefficient mit der relativen Grösse der Öffnung wächst und mit dem absoluten Grösserwerden derselben abnimmt, wie durch spätere Versuche vollkommen überzeugend gefunden wurde.

Eine andere Frage ist noch, wie stimmt die bekannte theoretisch bestimmte Formel für die Widerstandscoefficienten

$\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ mit den Versuchen zusammen, wenn man darin die gefundenen Coefficienten einsetzt?

Für $\varphi = 30°$ ist $\frac{a_1}{a} = 0,520$ und nach Tab. V. $\zeta = 6,024$; nehmen wir nun, wie für $\varphi = 37\frac{1}{2}°$ (Tab. VI.), $\alpha = 0,577$, so bekommen wir durch obige Formel

$\zeta = \left(\frac{1}{0,52.\ 0,577} - 1\right)^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 5,44$ Meter, welches eine grosse Abweichung noch nicht gibt.

Für $\varphi = 50°$ ist $\frac{a_1}{a} = 0,188$ und, weiter unten folgenden Versuchen zufolge, $\zeta = 79,663$. Setzen wir aber $\alpha = 0,541$, so gibt die theoretische Formel

$$\zeta = \left(\frac{1}{0,188.\ 0,541} - 1\right)^2 = 8,811^2 = 77,64.$$

Bei allen diesen Berechnungen gibt die theoretische Formel zu wenig, weshalb anzunehmen ist, dass die in der letzten Columne der letzten zwei Tabellen aufgeführten Ausflusscoefficienten (α) nicht blosse Contractions-, sondern Producte aus Contractions- und Geschwindigkeitscoefficienten sind.

b) Ausfluss durch die angesteckte, 61 Centimeter lange Eisenröhre.

Um einen vollen Ausfluss auch bei höheren Stellungen, wo der Querschnitt der Durchgangsöffnung sehr klein ausfällt, zu erzielen, wurde noch eine 61 Centimeter lange Röhre an das Ende des Hahnrohrs geschoben, wodurch die ganze Röhre um 58,8 Centimeter an Länge zunahm. Der Querschnitt der Ausmündung dieser Röhre war

$a = 12,49$ Quadratcentimeter, daher

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 158,66 \text{ und}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2,2004806.$$

Ferner wurde gefunden

$$h_1 = 0,8100 - 0,0250 = 0,785 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0,785 - 0,382 = 0,403 \text{ Meter, also}$$

$$h = \left(\frac{0,8860 + 0,6348}{2}\right)^2 = 0,578 \text{ Meter}.$$

Hiernach folgt die Formel für den Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{158,66\ (0,8860 - 0,6348)}{\tau} = \frac{158,66.\ 0,2512}{\tau}$$

$$= \frac{39,853}{\tau}.$$

Beim freien Ausfluss (Stellung auf 0°) war

$\tau = 56\frac{1}{4}$ Secunden, deshalb hier

$$\mu = \frac{39,853}{56,25} = 0,7085 \text{ und}$$

$$\zeta = 0,992.$$

Die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe enthält folgende Tabelle.

Tabelle VIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierkantig gebohrte Hähne im längeren parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel (φ).	Relativer Querschnitt $\left(\frac{a_1}{a}\right)$.	Ausflusszeit (τ).	Ausflusscoefficienten μ_1.	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	$56\frac{1}{4}$	0,7085 = μ	1,992	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,963	$56\frac{1}{2}$	0,7054	2,010	0,018
5	0,926	57	0,6992	2,046	0,054
$7\frac{1}{2}$	0,888	$58\frac{1}{2}$	0,6812	2,155	0,163
10	0,849	$60\frac{1}{2}$	0,6587	2,305	0,313
$12\frac{1}{2}$	0,809	$63\frac{1}{2}$	0,6276	2,539	0,547
15	0,769	$67\frac{1}{2}$	0,5904	2,869	0,877
$17\frac{1}{2}$	0,728	$72\frac{1}{2}$	0,5497	3,309	1,317
20	0,687	78	0,5109	3,831	1,839
$22\frac{1}{2}$	0,646	85	0,4689	4,549	2,557
25	0,604	93	0,4285	5,446	3,454
$27\frac{1}{2}$	0,562	$102\frac{1}{2}$	0,3888	6,615	4,623
30	0,520	$113\frac{1}{2}$	0,3511	8,111	6,119
$32\frac{1}{2}$	0,478	$126\frac{1}{2}$	0,3151	10,075	8,083
35	0,436	$143\frac{1}{2}$	0,2777	12,965	10,973
$37\frac{1}{2}$	0,394	164	0,2430	16,934	14,942

Die Fortsetzung dieser Versuche erfolgte mit einer kleineren Ausflussmenge und bei einer etwas grösseren mittleren Druckhöhe.

Es war hier $h_1 = 0,785$, wie vorher, aber

$$h_2 = 0,785 - 0,145 = 0,64 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = \left(\frac{0,886 + 0,800}{2}\right)^2 = 0,712 \text{ Meter}$$

und

$$\mu = \frac{158,66. \ 0,086}{\tau} = \frac{13,645}{\tau}.$$

Für $\varphi = 30^\circ$ wurde $\tau = 39$ Sec. gefunden, weshalb hier

$$\mu = \frac{13,645}{39} = 0,3499 \text{ und}$$

$$\zeta = 7,169 \text{ folgt.}$$

Fortsetzung von Tab. VIII.

(φ)	$\left(\frac{a_1}{a}\right)$	(r)	μ_1	$\frac{1}{\mu_1^2}$	$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_2}$
30	0,520	39	0,3499	8,169	6,177
$32\frac{1}{2}$	0,478	43	0,3173	9,931	7,939
35	0,436	$49\frac{1}{2}$	0,2757	13,160	11,168
$37\frac{1}{2}$	0,394	56	0,2437	16,843	14,851
40	0,352	65	0,2099	22,692	20,700
$42\frac{1}{2}$	0,310	75	0,1819	30,211	28,219
45	0,269	$89\frac{1}{4}$	0,1525	43,022	41,030
$47\frac{1}{2}$	0,229	108	0,1263	62,645	60,653
50	0,188	134*)	0,1018	96,439	94,447
$52\frac{1}{2}$	0,149	$176\frac{1}{2}$**)	0,0773	167,313	165,321
55	0,110	$240\frac{1}{2}$***)	0,0567	310,650	308,658

*) zwar voll im Rohre, jedoch abgelöst am obern Rande der Ausmündung, wie bei einem Überfall.

**) der gefüllte Querschnitt des Wassers zog sich im Rohre allmählig zurück, und nach 45 Secunden hörte der volle Ausfluss auf und das Wasser floss nur 1 Centimeter hoch im Rohre.

***) nicht voll.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse in dem ersten Theile dieser Tabelle mit denen der fünften Tabelle ist im Allgemeinen gut, wenn auch einige Male grössere Abweichungen vorkommen. Z. B. für $\varphi = 20°$ ist hier $\zeta = 1,839$, nach Tab. V. aber $\zeta = 1,782$; für $\varphi = 30°$ hier $\zeta = 6,024$, dort $\zeta = 6,119$. Diese Abweichungen verschwinden aber in den entsprechenden Ausflusscoefficienten fast ganz. So ist z. B. für $\zeta = 1,839$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} = 0,594$ und für $\zeta = 1,780$ ist $\mu = 0,590$ u. s. w.

Weit grössere Abweichungen stellen sich aber bei Vergleichung mit den beim Ausflusse durch Schieber gewonnenen Resultaten heraus. Dies ist aber auch zu erwarten und findet seine Erklärung darin, dass beim Schieber nur eine Verengung, beim Hahne aber zwei verengte Durchgänge und ausserdem noch eine doppelte Brechung in der Richtung statt haben. Z. B. für den relativen Querschnitt

$\frac{a_1}{a} = 0,394$ (bei $37\frac{1}{2}°$) wurde hier

ein Mal $\zeta = 14,942$,

ein zweites Mal $\zeta = 14,851$ gefunden, während der Schieber für

$\frac{a_1}{a} = 0,400$ ein Mal $\zeta = 8,078$, ein zweites Mal $\zeta = 8,116$

und für

$\frac{a_1}{a} = 0,350$ ein Mal $\zeta = 11,692$, ein zweites Mal $\zeta = 11,917$

gab, weshalb sich durch Interpolation für

$$\frac{a_1}{a} = 0,394 \text{ ein Mal } \zeta = 8,078 + 0,12\,(11,692 - 8,078)$$
$$= 8,078 + 0,434 = 8,512 \text{ und}$$

ein zweites Mal $\zeta = 8{,}116 + 0{,}12\ (11{,}917 - 8{,}116)$
$= 8{,}116 + 0{,}456 = 8{,}572$

ergibt.

c) Ausfluss unter Wasser.

Um den regelmässigen vollen Ausfluss so weit wie möglich hinauszuziehen und denselben noch bei den kleinsten Hahndurchgängen zu erzwingen, wurden noch folgende Versuche mit dem Ausflusse unter Wasser angestellt. Zu diesem Zwecke wurde ein parallelepipedischer Kasten von 70 Centimeter Länge, 50 Centimeter Breite und 30 Centimeter Tiefe so vor das Ausflussreservoir gestellt, dass das einfache Hahnrohr 5 Centimeter über dem Boden in demselben ausmündete. Durch einen stellbaren Überfall, welcher über der ganzen Breite dieses Kastens wegging, wurde dafür gesorgt, dass der Wasserspiegel während der ganzen Versuchsreihe im Mittel um 0,148 Meter über der Mitte der Hahnmündung stehen blieb. Die Versuchsreihe konnte erst bei 30° Drehung ihren Anfang nehmen, weil bei weniger Drehung das Wasser in diesem vorgesetzten Kasten durch das einströmende Wasser zu unruhig gemacht wurde, um richtige Resultate erhalten zu können. Selbst bei 30° war diese Bewegung noch bemerkbar, und nur erst bei 35° und mehr verlor sie sich allmählig. Als grösste Druckhöhe (h_1) war natürlich der Niveauabstand beider Wasserspiegel, bei welchem der Ausfluss aufgehört hatte, anzunehmen. Die kleinste Druckhöhe (h_2) war wie gewöhnlich die Differenz zwischen der grössten Druckhöhe und der Senkhöhe des Wasserspiegels während des Ausflusses.

Für diese Versuche bleibt $a = 12{,}40$ und also auch

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 159{,}82.$$

Übrigens war $h_1 = 0{,}612$ Meter und
$h_2 = 0{,}254$ Meter, daher

$$h = \left(\frac{0{,}7823 + 0{,}5040}{2}\right)^2 = 0{,}414 \text{ Meter.}$$

Hieraus folgt die Formel für den Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{159{,}81\ (0{,}7823 - 0{,}5040)}{\tau} = \frac{159{,}81.\ 0{,}2783}{\tau}$$
$$= \frac{44{,}475}{\tau}.$$

Bei 30° Drehung war $\tau = 121$ Secunden, folglich ist hier der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{44{,}475}{121} = 0{,}3676$$

und der Widerstandscoefficient

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 6{,}402.$$

Nimmt man in Ermangelung einer anderen Bestimmung den für eine grössere Druckhöhe gefundenen Widerstandscoefficienten des einfachen Rohres 0,612 auch hier an, so folgt der Widerstandscoefficient für den blossen Durchgang durch den auf 30° gestellten Hahn

$$\zeta = 6{,}402 - 0{,}612 = 5{,}790.$$

Vorstehende Versuche gaben bei dieser Stellung $\zeta = 6{,}024$; $6{,}128$; $6{,}119$ und $6{,}177$, also etwas mehr.

Folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe.

Tabelle IX.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierkantig gebohrte Hähne und für den Ausfluss unter Wasser.

Stellwinkel (φ).	Relativer Querschnitt der Verengung $\left(\frac{a_1}{a}\right)$.	Ausflusszeit (τ) in Secunden.	Ausfluss-coefficienten (μ_1).	Ausdrücke $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
30	0,520	121	0,3676	7,402	5,790
32½	0,478	136	0,3271	9,349	7,737
35	0,436	151	0,2946	11,524	9,912
37½	0,394	174	0,2556	15,303	13,691
40	0,352	198½	0,2241	19,915	18,303
42½	0,310	230	0,1934	26,738	25,126
45	0,269	272½	0,1632	37,532	35,920
47½	0,229	327	0,1360	54,046	52,434
50	0,188	401	0,1109	81,275	79,663
55	0,110	630	0,0706	200,604	198,992
60	0,027	1675	0,0266	1418,071	1416,459

Die hier gefundenen Widerstandscoefficienten sind durchgängig etwas kleiner als diejenigen, welche für den Ausfluss in freier Luft gefunden wurden. Es mag dies grösstentheils darin seinen Grund haben, dass bei diesen die mittlere Druckhöhe nur 0,414 Meter, dort aber 0,567 Meter und selbst noch mehr mass. Einer kleineren Druckhöhe entspricht aber ein grösserer Contractionscoefficient α, und diesem wieder, der Formel $\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ zufolge, ein kleinerer Widerstandscoefficient.

d) Ausfluss durch Mündungen im dünnen Blech.

Der volle Ausfluss bei mehr zugedrehtem Hahne wurde auch noch dadurch hervorgerufen, dass man eine kleine Mündung im dünnen Blech in die Ausmündung des Hahnrohres schob und das Wasser durch diese ausfliessen liess.

Die Form dieses Mundstückes und die Art und Weise, wie dasselbe in die Hahnröhre eingesetzt ist, führt Fig. 22 Taf. I. vor Augen. Die Mündung selbst war 2,020 Centimeter lang und 0,976 Centimeter hoch, hatte also den Inhalt

$$a_2 = 2{,}02 . \, 0{,}976 = 1{,}9715 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Der Flächeninhalt der Röhre bleibt

$$a = 12{,}40 \text{ Quadratcentimeter, daher ist}$$

$$\frac{a_2}{a} = \frac{1{,}9715}{12{,}4} = 0{,}159 \text{ und}$$

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = 0{,}02528.$$

Bei ziemlich geöffnetem Hahne strömte das Wasser in einem sehr schönen krystallhellen Strahle, ähnlich wie Fig. 13 und Fig. 14 Taf. I. aus.

Die bei jedem Versuche ausfliessende Wassermenge war die kleinere, und deshalb die mittlere Druckhöhe die grössere. Es wurde gefunden

$$h_1 = 0{,}8100 - 0{,}0249 = 0{,}7851 \text{ Meter und}$$
$$h_2 = 0{,}7851 - 0{,}1450 = 0{,}6400 \text{ Meter, daher}$$
$$h = \left(\frac{0{,}8861 + 0{,}8000}{2}\right)^2 = 0{,}711 \text{ Meter.}$$

Hiernach folgt die Formel für den Ausflusscoefficienten:

$$\mu_2 = \frac{2A}{a_2\sqrt{2g}} \frac{(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{\tau} = \frac{1981{,}7.\ 0{,}0861}{1{,}9715.\ \tau}$$
$$= \frac{86{,}5}{\tau}.$$

Bei geöffnetem Hahne ($\varphi = 0^0$) wurde $\tau = 137$ Secunden gefunden, weshalb der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu_2 = \frac{86{,}5}{137} = 0{,}6314$$

folgt.

Bezeichnet α den Contractionscoefficienten für die Ausmündung, so muss man eigentlich die Ausflussöffnung αa_2 und sonach jenen Ausflusscoefficienten

$$\frac{\mu_2}{\alpha} = \frac{2A(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{\alpha a_2\sqrt{2g}.\ \tau} = \frac{0{,}6314}{\alpha},$$ endlich auch den entsprechenden Widerstandscoefficienten

$$\frac{\alpha^2}{\mu_2^{\ 2}} - 1 = \frac{\alpha^2}{0{,}6314^2} - 1 = 2{,}508\alpha^2 - 1$$

setzen.

Der Widerstandscoefficient für die Bewegung des Wassers in der Röhre ist, da das Wasser in dieser $\frac{\alpha a_2}{a}$mal so schnell fliesst als in der Mündung,

$$= \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha a_2}{a}\right)^2 = 0{,}612.\ 0{,}02528 = 0{,}016.$$

Nimmt man nun an, dass beim Ausfluss durch die Mündung im dünnen Bleche ein Geschwindigkeitsverlust nicht statt hat, so gilt die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{\mu_2^{\ 2}} - 1 = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha a_2}{a}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\mu_2^{\ 2}} = \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{a_2}{a}\right)^2,$$ woraus dann der Contractionscoefficient für die eingesetzte Mündung im Bleche folgt

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu_1^{\ 2}} - \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{a_2}{a}\right)^2}}.$$

Hier ist $\frac{1}{\mu_2^2} - \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = 2{,}508 - 0{,}016 = 2{,}492$, daher der gesuchte Contractionscoefficient

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2{,}492}} = 0{,}633.$$

Für $\varphi = 50$ Grad wurde $\tau = 191$ Sec. gefunden, weshalb der Ausflusscoefficient

$$\frac{\mu_3}{\alpha} = \frac{86{,}5}{\alpha\tau} = \frac{86{,}5}{191\,\alpha} = \frac{0{,}4529}{\alpha} \text{ und}$$

der Widerstandscoefficient

$$\frac{\alpha^2}{\mu_3^2} - 1 = 4{,}875\ \alpha^2 - 1$$

sich ergibt.

Jetzt folgt der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch die Hahnbohrung, bezogen auf die Ausflussgeschwindigkeit:

$$\frac{\alpha^2}{\mu_3^2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2^2} = (4{,}875 - 2{,}508)\ \alpha^2 = 2{,}367\ \alpha^2,$$

und bezogen auf die Geschwindigkeit des Wassers im Hahnrohre:

$$\zeta = \left(\frac{\alpha^2}{\mu_3^2} - \frac{\alpha^2}{\mu_2^2}\right) : \left(\frac{\alpha a_2}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mu_3^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right)\left(\frac{a}{a_2}\right)^2$$
$$= 2{,}367 .\ 39{,}496 = 93{,}48.$$

In den vorausgegangenen Untersuchungen (Tab. VIII) wurde $\zeta = 94{,}447$ gefunden, was eine gute Übereinstimmung ist.

Die übrigen, durch Beobachtungen und Rechnung gewonnenen Resultate enthält folgende Tabelle X. Bei Vergleichung derselben mit den Ergebnissen, welche beim Ausfluss durch die lange Röhre gewonnen wurden, stellt sich eine den Umständen angemessene und zufriedenstellende Übereinstimmung heraus. Die grösseren Abweichungen am Ende der Versuchsreihe sind aus bekannten Gründen erklärlich und nicht zu vermeiden.

Tabelle X.

Coefficienten des Wasserdurchganges durch vierkantig gebohrte Hähne beim Ausfluss durch eine Mündung im dünnen Blech.

φ	$\frac{a_1}{a}$	τ	μ_3	$\frac{1}{\mu_3^2}$	$\frac{1}{\mu_3^2} - \frac{1}{\mu_2^2}$	$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2\left(\frac{1}{\mu_3^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right)$
0	1,000	137	0,6314 $= \mu_2$	2,508	0,000	0,00
40	0,352	149½	0,5786	2,987	0,479	18,90
42½	0,310	154½	0,5599	3,190	0,682	26,92
45	0,269	163	0,5307	3,550	1,042	41,17
47½	0,229	173½	0,4986	4,023	1,515	59,82
50	0,188	191	0,4529	4,875	2,367	93,48
52½	0,149	220	0,3932	6,468	3,960	156,39
55	0,110	275	0,3146	10,106	7,598	300,08
57½	0,072	325½	0,2658	14,158	11,650	460,12

Es möchte nicht ohne Interesse sein, auch noch folgende, bei einer grösseren Mündung in der dünnen Wand angestellte Versuche anzuführen.

Es war hier $a_2 = 2{,}5102$ Quadratcentimeter,
$h_1 = 0{,}7606$,
$h_2 = 0{,}6374$ und
$h = 0{,}698$ Meter.

Deshalb ergab sich

$$\mu_2 = \frac{1981{,}7.\ 0{,}07375}{2{,}5102.\ \tau} = \frac{58{,}22}{\tau}.$$

Bei völlig geöffnetem Hahne war $\tau = 88\frac{3}{4}$ Secunden, weshalb hierbei

$$\mu_2 = \frac{58{,}22}{88{,}75} = 0{,}6560 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}324 \text{ sich herausstellt.}$$

Die übrigen Ergebnisse enthält folgende Tabelle.

Tabelle X'.

Coefficienten des Wasserdurchganges durch vierseitig gebohrte Hähne beim Ausfluss durch eine grössere Mündung im dünnen Blech.

φ	$\frac{a_1}{a}$	τ	μ_2	$\frac{1}{\mu_2^2}$	$\frac{1}{\mu_2^2} - \frac{1}{\mu_2^2}$	$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{a}{a_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_2^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right)$
0	1,000	$88\frac{3}{4}$	$0{,}6560 = \mu_2$	2,324	0,000	0,00
30	0,520	94	0,6194	2,607	0,283	6,91
35	0,436	96	0,6065	2,719	0,395	9,64
40	0,352	106	0,5493	3,315	0.991	24,18
45	0,269	$120\frac{1}{2}$	0,4832	4,283	1,960	47,82
50	0,188	$155\frac{1}{2}$	0,3744	7,133	4,809	117,36
55	0,110	250	0,2329	18,437	16,113	393,20

Endlich mögen noch die Resultate der Versuche beim Ausfluss durch eine kleinere Mündung im dünnen Bleche hier ihren Platz finden.

Es war hier $a_2 = 1{,}1976$ Quadratcentimeter,
$h_1 = 0{,}7606$,
$h_2 = 0{,}6374$, folglich
$h = 0{,}698$ Meter.

Deshalb ergab sich

$$\mu_2 = \frac{1981{,}7.\ 0{,}07375}{1{,}1976.\ \tau} = \frac{122{,}04}{\tau}.$$

Bei völlig geöffnetem Hahne war die Ausflusszeit $\tau = 196$ Secunden, folglich der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu_2 = \frac{122{,}04}{196} = 0{,}6226 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\alpha_2^{\,2}} = 2{,}579.$$

Folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe.

Tabelle X''.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch vierseitig gebohrte Hähne im parallelepipedischen Rohre und beim Ausfluss durch eine kleinere Mündung im dünnen Blech.

φ	$\frac{a_1}{a}$	τ	μ_3	$\frac{1}{\mu_3^2}$	$\frac{1}{\mu_3^2} - \frac{1}{\mu_2^2}$	$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_3^2} - \frac{1}{\mu^2}\right)$
0	1,000	196	$0{,}6226 = \mu_2$	2,579	0,000	0,00
30	0,520	198	0,6164	2,632	0,053	5,67
35	0,436	199	0,6133	2,659	0,080	8,53
40	0,352	202	0,6042	2,740	0,161	17,20
45	0,269	209	0,5839	2,933	0,354	37,90
50	0,188	221	0,5522	3,279	0,700	75,04
55	0,110	261	0,4676	4,574	1,995	213,83
60	0,027	466	0,2619	14,581	12,002	1286,69

Die zum Theil sehr grossen Abweichungen der Ergebnisse, welche in den letzten Tabellen (X, X', X'') zusammengestellt worden sind, haben vorzüglich darin ihren Grund, dass die beobachteten Zeiten in sehr kleinen Differenzen wachsen, und daher ein Beobachtungsfehler von einer Zeitsecunde schon einen bedeutenden Einfluss auf das Rechnungsresultat hat. Z. B. für $\varphi = 50°$ wurde gefunden $\zeta = 93{,}48$, $117{,}36$ und $75{,}04$, wovon allerdings das Mittel $\frac{285{,}88}{3} = 95{,}29$ dem auf andere Weise gefundenen Werthe 94,447 sehr nahe kommt.

Man ersieht hieraus, dass diese Versuche beim Einsetzen einer kleinen Mündung im dünnen Bleche nur dann, wenn der Hahn mehr zugedreht ist, wobei die Zeitunterschiede grösser ausfallen, erträglich genaue Resultate versprechen. Da aber gerade dann wieder der kleinste Fehler in der Hahnstellung einen beträchtlichen Fehler im Querschnittsverhältniss $\left(\frac{a_1}{a}\right)$ verursacht, so ist auch hier wieder die erwünschte Schärfe nicht zu erwarten.

---

2) Hahn mit runder Bohrung im cylindrischen Rohre.

Die Versuche über den Ausfluss durch cylindrisch gebohrte Hähne im cylindrischen Rohre wurden mit einem Hahne vorgenommen, der in einer $27\frac{1}{2}$ Centimeter langen und 4 Centimeter weiten Messingröhre sass und im Ganzen so geformt war, wie der in Fig. 1 und 2 Taf. II. abgebildete Hahn mit parallelepipedischer Bohrung. Der Apparat zum Drehen und Stellen des Hahnes, so wie die in einem eingetheilten Messingkreise bestehende Vorrichtung zum Ablesen der Drehungswinkel waren dieselben (s. B, 1). Der Hahn selbst war von unbedeutender Co-

nicität; der grössere Halbmesser mass 3,208 Centimeter und der kleinere 2,962 Centimeter, folglich war der mittlere Hahnhalbmesser

$$R = \frac{3{,}208 + 2{,}962}{2} = 3{,}085 \text{ Centimeter},$$

und die halbe Differenz der äusseren Halbmesser

$$\Delta = \frac{3{,}208 - 2{,}962}{2} = 0{,}123 \text{ Centimeter}.$$

Bei der Berechnung der Querschnitte können wir diese Conicität unberücksichtigt lassen und den Hahn als einen Cylinder von 3,085 Centim. Halbmesser ansehen. Die Fehler, welche wir bei dieser Annahme begehen, sind, wie wir schon bei dem parallelepipedisch gebohrten Hahne gesehen haben, unbedeutend, so lange die Durchgangsöffnung nicht sehr klein ist. Da aber bei einer kleinen Durchgangsöffnung, d. i. dann, wenn der Hahn beinahe abschliesst, schon der kleinste Fehler im Stellen oder Ablesen des Drehungswinkels einen bedeutenden Fehler im Resultate gibt, so können wir schon aus diesen Gründen auf ein scharfes Resultat bei kleinen Durchgangsöffnungen nicht rechnen und daher jene Differenz, welche aus der Abweichung des Hahnes von der Cylinderform entspringt, übersehen.

Der einem gewissen Stellwinkel (φ) des Hahnes entsprechende Querschnitt bestimmt sich, unter der Voraussetzung, dass der Hahn cylindrisch ist oder als ein Cylinder angesehen werden kann, auf folgende Weise. Er sei $ABDE$ Fig. 5 Taf. II. der cylindrische Hahn und $CHCK$ (s. Aufriss) die cylindrische Bohrung desselben. Der Halbmesser $CF = CG$ (s. Grundriss) derselben ist dem Halbmesser r des Hahnrohres gleich, die halbe Tiefe FH der Bohrung ist aber durch die Formel

$$FH = GK = \sqrt{R^2 - r^2}$$

bestimmt.

Dreht man den Hahn um einen Winkel $FCF_1 = HCH_1 = KCK_1$, so dass die Einmündung der Bohrung aus der Lage HK in die Lage H_1K_1 kommt, so entsteht eine Durchgangsöffnung H_1NKN (s. Aufriss), deren Querschnitt aus zwei Segmenten NH_1N und NKN, wovon das letztere einem Kreise angehört, zusammengesetzt ist. Die vertikale Linie NN, in welcher diese beiden Segmente zusammenstossen, geht durch den Endpunkt M des Halbmessers, welcher nach dem Durchschnitte L der beiden Mündungsdurchmesser HK und H_1K_1 gerichtet ist, denn diesem Endpunkte entsprechen die gleichen Ordinaten Nn und N_1n_1 der in der Figur umgeklappten Querschnitte der Hahnbohrung und der Hahnröhre. Es ist hiernach das Kreissegment NKN (s. Aufriss) gleich dem doppelten Segmente $KN_1n_1 = H_1Nn$ (s. Grundriss). Der Inhalt des letzteren bestimmt sich aber auf folgende Weise.

Ist O der Mittelpunkt des Durchmessers H_1K_1 der Bohrung, so lässt sich $Op = u$ als Abscisse und $pP = y$ als Ordinate des zu berechnenden Flächenstückes H_1Nn ansehen. Hiernach ist ein Element dieses Flächenstückes:

$dF = ydu$, oder, da $y = \sqrt{r^2 - u^2}$,

$dF = \sqrt{r^2 - u^2}.\, du$ und sonach, wenn man die anfängliche Abscisse On mit b bezeichnet, der vollständige Inhalt dieses Flächenstückes:

$$dF = \int_b^r ydu = \int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}.\, du.$$

Bezeichnet φ den Drehungs- oder Stellwinkel $FCF_1 = HCH_1$, so hat man den Winkel $MCO = \frac{\varphi}{2}$ und daher

$$b = CM \sin MCO = R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Bezeichnet dagegen α den Drehungswinkel HCK, bei welchem der Abschluss eintritt, so hat man

$$r = CH_1 \sin H_1CO = R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Das zweite, den Querschnitt der Durchgangsöffnung bildende, Segment NH_1N (s. Aufriss) lässt sich auf folgende Weise berechnen.

Die Ordinate Pp ist dieselbe wie oben, nämlich

$y = \sqrt{r^2 - u^2}$, die Abscisse $Oq = x$ ist dagegen parallel zu HK und daher $= Op \cos H_1Cq - pr$, oder

$$x = u \cos \varphi - Qp \sin \varphi$$

$= u \cos \varphi - v \sin \varphi$, wenn man die Ordinate Qp des Bogens H_1MK_1 mit v bezeichnet.

Nun ist aber die Hälfte des gesuchten Segmentes NH_1N (s. Aufriss):

$F_1 = \int_b^r y dx$, daher auch

$$= \int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}.\ d\,(u \cos \varphi - v \sin \varphi)$$

$$= \int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}\ (\cos \varphi.\ du - \sin \varphi\ dv).$$

Um dieses Integral vollziehen zu können, muss dv durch u und du ausgedrückt sein. Nun ist aber, den Eigenschaften des Kreises zufolge, für die Bogenhöhe $z = RO - Qp = h - v$ die Gleichung

$z\,(2\,R - z) = \overline{Op}^2 = u^2$ giltig; es ist daher

$z = R - \sqrt{R^2 - u^2}$ und

$dv = - dz = - \frac{udu}{\sqrt{R^2 - u^2}}$, so wie das in Frage stehende Flächenstück

$$F_1 = \int_b^r \sqrt{r^2 - u^2} \left(\cos \varphi + \frac{u \sin \varphi}{\sqrt{R^2 - u^2}}\right) du$$

zu setzen.

Die gewöhnlichen Dimensionsverhältnisse der Hähne gestatten

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - u^2}} = (R^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{u^2}{2\,R^2}\right)$$

anzunehmen, weshalb nun der Ausdruck für das zweite Segment folgende Form annimmt:

$$F_1 = \int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}\left(\cos \varphi + \frac{u \sin \varphi}{R} + \frac{u^3 \sin \varphi}{2\,R^3}\right) du.$$

Durch Addition und Verdoppelung der beiden Ausdrücke für F und F_1 ergibt sich folgende Formel für den Inhalt des Querschnittes der dem Stellwinkel φ entsprechenden Durchgangsöffnung:

$$a_1 = 2\int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}\left(1 + \cos\varphi + \frac{u \sin\varphi}{R} + \frac{u^3 \sin\varphi}{2R^3}\right) du.$$

Nun ist

$$\int \sqrt{r^2 - u^2}.\, du = \frac{u\sqrt{r^2 - u^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\, arc\left(\sin = \frac{u}{r}\right),\ \text{folglich}$$

$$\int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}.\, du = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - arc\left(\sin = \frac{b}{r}\right)\right] - \frac{b\sqrt{r^2 - b^2}}{2};$$

ferner

$$\int \sqrt{r^2 - u^2}.\, udu = -\frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - u^2)^3},\ \text{demnach}$$

$$\int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}.\, udu = \frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - b^2)^3};$$

endlich

$$\int \sqrt{r^2 - u^2}.\, u^3du = -\frac{r^2}{3}\sqrt{(r^2 - u^2)^3} + \frac{1}{5}\sqrt{(r^2 - u^2)^5},\ \text{folglich}$$

$$\int_b^r \sqrt{r^2 - u^2}.\, u^3du = \frac{r^2}{3}\sqrt{(r^2 - b^2)^3} - \frac{1}{5}\sqrt{(r^2 - b^2)^5}$$

$$= \frac{2r^2 + 3b^2}{15}\sqrt{(r^2 - b^2)^3};$$ es ergibt sich daher für den gesuchten Querschnitt

$$a_1 = (1 + \cos\varphi)\left[r^2\left(\frac{\pi}{2} - arc\left(\sin = \frac{b}{r}\right)\right) - b\sqrt{r^2 - b^2}\right]$$
$$+ \frac{2}{3}\sin\varphi\,\frac{\sqrt{(r^2 - b^2)^3}}{R} + \frac{(2r^2 + 3b^2)\sin\varphi}{30}.\,\frac{\sqrt{(r^2 - b^2)^3}}{R^3}.$$

Durch Einführung eines Hilfswinkels ψ, für welchen

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{b}{r} = \frac{R\sin\frac{\varphi}{2}}{R\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ist, ergibt sich etwas einfacher

$$a_1 = r^2\left[\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2(\psi - \sin\psi) + \frac{2r}{3R}\sin\varphi\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3\left(1 + \frac{1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{10}.\frac{r^2}{R^2}\right)\right].$$

Bei ungefähren Bestimmungen, oder wenn man auf die grössere Genauigkeit Verzicht leisten will, kann man

$$\frac{1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{10}.\frac{r^2}{R^2}$$

ausser Acht lassen und demnach

$$a_1 = r^2\left[\left(\cos\frac{\varphi}{2}^2\right)(\psi - \sin\psi) + \frac{2r}{3R}\sin\varphi\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3\right]$$

setzen.

Wir rechnen nach der genaueren Formel und müssen hiernach das Querschnittsverhältniss oder den relativen Querschnitt des Hahndurchganges, für den Querschnitt (πr^2) des Hahnrohres als Einheit, setzen:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \psi - \sin\psi}{\pi} + \frac{2r}{3R}\,\frac{\sin\varphi}{\pi}\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3 \left(1 + \frac{1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{10}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Bei dem zu unseren Versuchen in Anwendung gekommenen Hahne war

$r = 2{,}027$ und

$R = 3{,}085$ Centimeter, daher

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = 0{,}65705$, welches

$\frac{\alpha}{2} = 41^\circ\ 4\frac{1}{2}'$, also

$\alpha = 82^\circ\ 9'$

gibt.

Eine einfache Beobachtung mit dem aufgesetzten, bis auf halbe Grade eingetheilten Kreis gab wirklich den Drehungswinkel, bei welchem ein Abschliessen eintrat, ungefähr $82\frac{1}{8}$ Grad.

Wir können nun in die obige Formel einsetzen:

$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831,$

$\frac{2r}{3\pi R} = \frac{0{,}43803}{\pi} = 0{,}13943$ und

$\frac{r^2}{10\,R^2} = 0{,}04317,$

und bekommen sonach für unsere Versuche

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}31831\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2(\psi - \sin\psi)$$
$$+\ 0{,}13943\ \sin\varphi\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3\left[1 + 0{,}04317\left(1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2\right)\right],$$

worin der Hilfswinkel ψ durch den Ausdruck

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{0{,}65705} = 1{,}52195\sin\frac{\varphi}{2}$$

bestimmt wird.

Auch lässt sich hiernach noch setzen

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}31831\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2(\psi - \sin\psi)$$
$$+\ 0{,}14545\ \sin\varphi\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3\left(1 + 0{,}1438\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right)$$

oder auch

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}15916\ (1 + \cos\varphi)\ (\psi - \sin\psi)$$
$$+\ 0{,}15590\ \sin\varphi\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^3(1 - 0{,}0671\ \cos\varphi).$$

Es ist übrigens leicht zu erachten, dass diese Formel und eine hiernach berechnete Tabelle für die, verschiedenen Stellwinkeln entsprechenden, relativen Querschnitte der Hahndurch-

gänge in allen den Fällen anwendbar bleiben, bei welchen α, d. i. der Drehwinkel beim Abschliessen, derselbe, nämlich $= 82^\circ\ 9'$ ist.

Um die Verhältnisse zwischen den Inhalten der verengten Querschnitte und den Widerstandscoefficienten übersehen zu können, hat man diese Inhalte für eine von $2\frac{1}{2}$ zu $2\frac{1}{2}^\circ$ steigende Reihe von Stellwinkeln berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XI.

Coefficienten für die, verschiedenen Stellungen eines rund gebohrten Hahnes entsprechenden, Querschnittsverhältnisse.

φ°	ψ°	ψ	$\sin \psi$	$\psi - \sin \psi$	Erstes Product.	Zweites Product.	Querschnitts-verhältniss $\left(\frac{a_1}{a}\right)$, oder Summen beider Producte.
0	180° 0′	3,1416	0,0000	3,1416	1,0000	0,0000	1,000
$2\frac{1}{2}$	176° 12′	3,0753	0,0663	3,0093	0,9574	0,0063	0,964
5	172° 13′	3,0087	0,1325	2,8762	0,9138	0,0126	0,926
$7\frac{1}{2}$	168° 34′	2,9420	0,1982	2,7438	0,8697	0,0187	0,888
10	164° 46′	2,8757	0,2627	2,6130	0,8254	0,0246	0,850
$12\frac{1}{2}$	160° 56′	2,8088	0,3267	2,4821	0,7807	0,0302	0,811
15	157° 5′	2,7416	0,3894	2,3522	0,7360	0,0355	0,772
$17\frac{1}{2}$	153° 14′	2,6744	0,4504	2,2240	0,6915	0,0404	0,732
20	149° 21′	2,6066	0,5098	2,0968	0,6474	0,0448	0,692
$22\frac{1}{2}$	145° 27′	2,5386	0,5671	1,9715	0,6037	0,0487	0,652
25	141° 32′	2,4702	0,6221	1,8481	0,5607	0,0521	0,613
$27\frac{1}{2}$	137° 35′	2,4013	0,6745	1,7268	0,5186	0,0549	0,573
30	133° 36′	2,3318	0,7242	1,6076	0,4775	0,0570	0,535
$32\frac{1}{2}$	129° 35′	2,2617	0,7707	1,4910	0,4375	0,0585	0,496
35	125° 32′	2,1910	0,8138	1,3772	0,3988	0,0595	0,458
$37\frac{1}{2}$	121° 25′	2,1191	0,8534	1,2657	0,3613	0,0596	0,421
40	117° 16′	2,0467	0,8889	0,1578	0,3254	0,0592	0,385
$42\frac{1}{2}$	113° 2′	1,9728	0,9203	1,0525	0,2910	0,0581	0,349
45	108° 45′	1,8980	0,9469	0,9511	0,2584	0,0564	0,315
$47\frac{1}{2}$	104° 24′	1,8221	0,9686	0,8535	0,2276	0,0542	0,282
50	99° 56′	1,7441	0,9850	0,7591	0,1985	0,0513	0,250
$52\frac{1}{2}$	95° 22′	1,6645	0,9956	0,6689	0,1713	0,0484	0,220
55	90° 42′	1,5830	0,9999	0,5831	0,1460	0,0442	0,190
$57\frac{1}{2}$	85° 53′	1,4989	0,9974	0,5015	0,1227	0,0399	0,163
60	80° 54′	1,4120	0,9874	0,4246	0,1014	0,0356	0,137
$62\frac{1}{2}$	75° 42′	1,3215	0,9691	0,3524	0,0820	0,0309	0,113
65	70° 17′	1,2267	0,9414	0,2853	0,0646	0,0262	0,091
$67\frac{1}{2}$	64° 32′	1,1263	0,9028	0,2235	0,0492	0,0214	0,071
70	58° 24′	1,0193	0,8517	0,1676	0,0358	0,0166	0,052
$72\frac{1}{2}$	51° 42′	0,9023	0,7848	0,1175	0,0243	0,0121	0,036
75	44° 12′	0,7714	0,6972	0,0742	0,0149	0,0079	0,023
$77\frac{1}{2}$	35° 25′	0,6181	0,5795	0,0386	0,0075	0,0042	0,012
80	23° 55′	0,4174	0,4054	0,0120	0,0022	0,0013	0,004
$82\frac{1}{6}$	0° 0′	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000

a) Ausfluss durch den cylindrisch gebohrten Hahn.

α) Ausfluss durch das einfache Hahnrohr in die freie Luft.

Der Durchmesser der Ausflussöffnung war 4,034 Centimeter, daher der Flächenraum derselben

$$a = \pi . \left(\frac{4{,}034}{2}\right)^2 = 12{,}781 \text{ Quadratcentimeter und}$$

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}781} = 155{,}05, \text{ so wie}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}1904782.$$

Es wurde ferner gefunden

$$h_1 = 0{,}7980 - 0{,}0202 = 0{,}7778 \text{ Meter,}$$

$$h_2 = 0{,}7778 - 0{,}3818 = 0{,}3960 \text{ Meter, demnach}$$

$$h = \left(\frac{0{,}88193 + 0{,}62929}{2}\right)^2 = 0{,}571 \text{ Meter.}$$

Hieraus folgt nun die Formel für die Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{155{,}05 . \ 0{,}25264}{\tau} = \frac{39{,}173}{\tau}.$$

Bei geöffnetem Hahne, also für die einfache, $27\frac{1}{2}$ Centimeter lange cylindrische Röhre, wurde die Ausflusszeit $\tau = 51$ Secunden beobachtet, weshalb für diesen Fall sich ergibt

$$\mu = \frac{39{,}173}{51} = 0{,}7681 \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0{,}6950.$$

Die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe enthält folgende Tabelle.

Tabelle XII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch cylindrisch durchbohrte Hähne beim Ausfluss in die freie Luft.

Stellwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ des Verengung.	Ausflusszeit in Secunden τ.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	51	0,7681 $= \mu$	1,695	0,000
2½	0,964	51¼	0,7643	1,712	0,017
5	0,926	51½	0,7606	1,728	0,033
7½	0,888	53	0,7391	1,831	0,136
10	0,850	55	0,7122	1,971	0,276
12½	0,811	57½	0,6813	2,155	0,460
15	0,772	61	0,6422	2,425	0,730
17½	0,732	65½	0,5981	2,796	1,101
20	0,692	71	0,5517	3,285	1,590
22½	0,652	78	0,5022	3,965	2,270
25	0,613	85½	0,4582	4,764	3,069
27½	0,573	94½	0,4145	5,820	4,125
30	0,535	105	0,3731	7,185	5,490
32½	0,496	118	0,3320	9,074	7,379
35	0,458	133	0,2945	11,527	9,832
37½	0,421	152 *)	0,2577	15,057	13,362
40	0,385	178½ **)	0,2195	20,764	19,069
				Contractionscoefficient $\alpha_1 = \frac{a}{a_1} \mu_1$.	
42½	0,349	204½	0,1916	0,549	
45	0,315	233½	0,1678	0,533	
47½	0,282	265	0,1478	0,524	
50	0,250	305	0,1284	0,514	
52½	0,220	350½	0,1118	0,509	
55	0,190	409	0,0958	0,504	
57½	0,163	475	0,0825	0,507	
60	0,137	576½	0,0679	0,496	
62½	0,113	695 ***)	0,0564	0,499	
65	0,091	867½	0,0452	0,497	
67½	0,071	1080	0,0363	0,514	
70	0,052	1470	0,0267	0,509	
72½	0,036	2051	0,0191	0,525	

*) Anfangs unruhiger und wallender Ausfluss; nach 45 Secunden hörte der volle Ausfluss auf, indem sich ein mehr gestreckter hohler Strahl bildete.

**) Bei diesem und bei den folgenden Versuchen ein hohler, aber ringsum anschliessender Strahl.

***) Die Strahlenquerschnitte bei diesem und bei den folgenden vier Versuchen sind in Fig. 6 Taf. II. durch *a*, *b*, *c*, *d*, *e* repräsentirt.

Für die Resultate bei Stellungen über 40 Grad sind die Widerstandscoefficienten oder Druckverluste nicht berechnet worden, weil bei diesen ein voller Ausfluss nicht statt hatte und

mehr die Erscheinungen beim Ausfluss durch die Mündung in der dünnen Wand eintraten. Aus diesem Grunde ist dann auch nicht der Querschnitt der Röhre, sondern der Querschnitt der Hahnbohrung als Ausflussöffnung anzusehen. Die diesen Öffnungen entsprechenden Ausflusscoefficienten sind in der fünften Columne als Contractionscoefficienten $\alpha_1 = \frac{a}{a_1} \mu_1$ aufgeführt worden. Vergleicht man diese Werthe mit denen in Taf. VII. für den Durchgang durch vierseitig gebohrte Hähne, so stellt sich allerdings eine gute Übereinstimmung heraus. Während wir diese Contractionscoefficienten hier zwischen 0,50 und 0,55 finden, wurden sie dort 0,53 bis 0,56 gefunden, da sich aber hier eine mehr runde, dort eine mehr schmale und hohe Öffnung bildet, und bekanntlich bei Öffnungen jener Art eine kleinere Contraction statt hat als bei denen der letztern Art, so ist selbst noch die Abweichung der Ergebnisse beider Versuchsreihen erklärlich. Aber auch beim vollen Ausfluss findet eine gute Übereinstimmung statt. Während z. B. hier für $\varphi = 27\frac{1}{2}$ Grad, wo $\frac{a_1}{a} = 0{,}57$ ist, $\zeta = 4{,}125$ gefunden wurde, ist beim vierkantig gebohrten Hahne für $\varphi = 27\frac{1}{2}$ Grad, wo

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}56,\ \zeta = 4{,}508, \text{ und für } \varphi = 25^\circ, \text{ wo}$$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}60,\ \zeta = 3{,}392, \text{ weshalb sich durch Interpolation für}$$

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}57,\ \zeta = 4{,}508 - \frac{4{,}508 - 3{,}392}{4}$$

$$= 4{,}508 - 0{,}279 = 4{,}229$$

herausstellt.

Um bei höheren Stellwinkeln einen vollen Ausfluss zu erzielen, wurden noch folgende Versuche mit einer an das Hahnrohr angeschobenen Eisenröhre von 60 Centimeter Länge angestellt.

β) Ausfluss durch ein angestecktes Eisenrohr in die freie Luft.

Der Durchmesser der Ausmündung dieser Röhre wurde = 4,042 Centimeter gefunden, folglich deren Inhalt

$$a = \pi . (2{,}021)^2 = 12{,}832 \text{ Quadratcentimeter}$$

und

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}832} = 154{,}44, \text{ so wie}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}1887486.$$

Es ergab sich ferner

$$h_1 = 0{,}8260 - 0{,}0202 = 0{,}8058 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0{,}8058 - 0{,}3818 = 0{,}4240 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = \left(\frac{0{,}89766 + 0{,}65115}{2}\right)^2 = 0{,}7743^2 = 0{,}600 \text{ Meter}$$

und hiernach der in Frage stehende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{154{,}44\ (0{,}89766 - 0{,}65115)}{t}$$

$$= \frac{154{,}44 .\ 0{,}24651}{t} = \frac{38{,}070}{t}.$$

Bei geöffnetem Hahne, also für die blosse Röhrenverbindung, war die Ausflusszeit

$\tau = 54\frac{3}{4}$ Secunden, daher ist für diesen Fall

$\mu = \frac{38,070}{54,75} = 0,6953$ und der Widerstandscoefficient

$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 1,068.$

In folgender Tabelle (XIII) sind die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe unter einander gestellt.

Tabelle XIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch cylindrisch gebohrte Hähne beim Ausfluss durch das verlängerte Hahnrohr in die freie Luft.

Drehwinkel φ in Graden.	Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	$54\frac{3}{4}$	0,6953 $= \mu$	2,068	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,964	55	0,6922	2,087	0,019
5	0,926	$55\frac{1}{2}$	0,6860	2,125	0,057
$7\frac{1}{2}$	0,888	$56\frac{3}{4}$	0,6708	2,222	0,154
10	0,850	$58\frac{1}{2}$	0,6508	2,361	0,293
$12\frac{1}{2}$	0,811	$60\frac{1}{2}$	0,6293	2,526	0,458
15	0,772	64	0,5948	2,826	0,758
$17\frac{1}{2}$	0,732	68	0,5599	3,191	1,123
20	0,692	$72\frac{1}{2}$	0,5251	3,627	1,559
$22\frac{1}{2}$	0,652	$78\frac{1}{2}$	0,4850	4,252	2,184
25	0,613	$86\frac{1}{2}$	0,4401	5,163	3,095
$27\frac{1}{2}$	0,573	95	0,4007	6,227	4,159
30	0,535	$104\frac{1}{2}$	0,3643	7,535	5,467
$32\frac{1}{2}$	0,496	115	0,3310	9,125	7,057
35	0,458	$130\frac{1}{2}$	0,2917	11,750	9,682
$37\frac{1}{2}$	0,421	$146\frac{1}{2}$	0,2599	14,808	12,740
40	0,385	$167\frac{1}{2}$	0,2273	19,358	17,290
$42\frac{1}{2}$	0,349	190	0,2004	24,908	22,840
45	0,315	$219\frac{1}{2}$	0,1734	33,243	31,175
$47\frac{1}{2}$	0,282	$249\frac{1}{2}$	0,1526	42,953	40,885
50	0,250	$286\frac{1}{2}$	0,1329	56,635	52,567
$52\frac{1}{2}$	0,220	$334\frac{1}{2}$	0,1138	77,202	75,134
55	0,190	395	0,0964	107,653	105,585
$57\frac{1}{2}$	0,163	466*)	0,0817	149,832	147,764
				α_1	
60	0,137	$577\frac{1}{2}$**)	0,0659	0,481	
$62\frac{1}{2}$	0,113	$685\frac{1}{2}$	0,0555	0,492	
65	0,091	$843\frac{1}{2}$	0,0451	0,497	
$67\frac{1}{2}$	0,071	$1040\frac{1}{2}$	0,0366	0,518	
70	0,052	1414	0,0269	0,514	

*) Nach 360 Secunden hörte der volle Ausfluss auf, wie aus der plötzlichen Vergrösserung der Sprungweite zu erkennen war.

**) Von hier an fand ein voller Ausfluss nicht mehr statt, weshalb auch für diese letzten Versuche die auf die Querschnitte der Durchgangsöffnungen bezogenen Ausflusscoefficienten (α_1) statt der Widerstandscoefficienten eingeführt worden sind.

Man erhält die genaueren Werthe für die Ausflusscoefficienten bei hohen Hahnstellungen, indem man sich der Formel

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{\,2}} - \zeta\left(\frac{\alpha_1}{a}\right)^2}}$$

bedient.

Z. B. für 60° ist $\alpha_1 = 0{,}481$, $\frac{\alpha_1}{a} = 0{,}137$, und da nun noch der Röhrenwiderstands-coefficient $\zeta = 1{,}068$ gefunden wurde, so folgt der genaue Ausflusscoefficient, indem man annähernd

$$\alpha = \alpha_1\left(1 + \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{\alpha_1 \alpha_1}{a}\right)^2\right)$$

setzt,

$$\alpha = 0{,}481 + 0{,}240.\ 1{,}068\ (0{,}481.\ 0{,}137)^2$$
$$= 0{,}481 + 0{,}001 = 0{,}482.$$

Man ersieht hieraus, dass für sehr kleine Verengungen der Einfluss des Röhrenwiderstandes ausser Acht gelassen werden kann.

Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der beiden letzten Versuchsreihen ist die erwünschte. Z. B. für 10°, 20°, 30° Stellung gibt die Tabelle XII.

$\zeta = 0{,}276;\ 1{,}590;\ 5{,}490,$

die Tabelle XIII.

$\zeta = 0{,}293;\ 1{,}559;\ 5{,}467.$

Die grössere Differenz bei 40° Stellung, wo nach Tab. XII. $\zeta = 19{,}069$, nach Tab. XIII. $\zeta = 17{,}290$ ist, hat ihren Grund darin, dass hier, bei dem kürzeren Rohre, der volle Ausfluss aufgehört hat, während er beim langen Rohre noch vollkommen erfolgt. Die berechneten Ausflusscoefficienten für Stellungen von 60° und darüber geben wieder eine gute Übereinstimmung.

γ) Ausfluss durch ein angestecktes Rohr und unter Wasser.

Um den vollen Ausfluss bei kleinen Hahndurchgängen auch noch auf eine andere Weise herbeizuführen, wurde der bereits erwähnte Wasserkasten wieder so vor das Ausflussreservoir gesetzt, dass das zweite Ende der an das Hahnrohr angesteckten Eisenröhre wenige Centimeter über dem Boden in diesen Kasten ausmündete. Das in diesen, schon vor dem Anfang einer jeden Beobachtung gefüllten Kasten fliessende Wasser floss durch einen Überfall wieder ab, weshalb sich ein unveränderlicher Wasserstand bildete, der allerdings dem Druck im Wasserreservoir entgegenwirkte und deshalb das Wasser nur unter der Differenz beider ausfliessen liess.

Bei diesen Versuchen war, wie bei den vorigen,

$a = 12{,}832$, also auch

$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154{,}44$; dagegen wurde gefunden:

der Niveauabstand beider Wasserspiegel am Anfange der Beobachtung oder

$h_1 = 0{,}6530,$

und derselbe am Ende jeder Beobachtung oder

$h_2 = 0{,}6530 - 0{,}1451 = 0{,}5079;$

daher die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0{,}80808 + 0{,}71267}{2}\right)^2 = 0{,}7604^2 = 0{,}578 \text{ Meter,}$$

und

$$\mu = \frac{154{,}44.\ 0{,}09541}{\tau} = \frac{14{,}735}{\tau}.$$

Bei Einstellung des Hahnes auf 35° ergab sich die Ausflusszeit $\tau = 51$ Secunden, weshalb sich hiernach

$$\mu_1 = \frac{14{,}735}{51} = 0{,}2889 \text{ und}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 10{,}98$$

herausstellt.

Folgendes sind die übrigen Resultate der Beobachtung.

Tabelle XIV.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch cylindrisch gebohrte Hähne beim Ausfluss durch das verlängerte Hahnrohr und unter Wasser.

Drehwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausfluss-coefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
35	0,458	51	0,2889	11,98	9,91
37½	0,421	57½	0,2563	15,23	13,16
40	0,385	64½	0,2285	19,16	17,09
42½	0,349	74	0,1991	25,22	23,15
45	0,315	84½	0,1744	32,89	30,82
47½	0,282	96	0,1535	42,45	40,38
50	0,250	110	0,1340	55,73	53,66
52½	0,220	127½	0,1156	74,87	72,80
55	0,190	149½	0,0986	102,94	100,87
57½	0,163	179	0,0823	147,57	145,50
60	0,137	212½	0,0693	207,97	205,90
62½	0,113	260	0,0567	311,34	309,27
65	0,091	325½	0,0453	487,97	485,90
67½	0,071	411	0,0359	777,99	775,92
70	0,052	549	0,0268	1388,14	1386,07
72½	0,036	788	0,0187	2859,83	2857,76
75	0,023	1296	0,0114	7735,66	7733,59

Da bei völlig geöffnetem Hahne das Wasser im vorgesetzten Kasten in grosse Wallungen gerieth, so konnte durch diese Versuche der Röhrenwiderstand nicht ermittelt werden, und es musste daher für diese Versuchsreihe der beim Ausfluss in die freie Luft gefundene Werth $\zeta = 1{,}07$ hier benutzt werden. Wenn wir also z. B. für $\varphi = 35°$, $\frac{1}{\mu_1^2} = 11{,}98$ gefunden haben, so können wir den entsprechenden Widerstandscoefficienten

$$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 11{,}98 - 2{,}07 = 9{,}91$$

setzen, wie auch die vorstehende Tafel anzeigt.

Übrigens gewähren auch die Resultate dieser letzten Tabelle (XIV) eine gute Übereinstimmung mit den vorher gewonnenen Ergebnissen. Z. B. für $\varphi = 50^\circ$ ist nach Tab. XIII. $\zeta = 52{,}567$, nach Tab. XIV. aber $\zeta = 53{,}66$ u. s. w.

b) Ausfluss durch den gebrochenen oder krumm gebohrten Hahn.

Da in der praktischen Hydraulik nicht selten Hähne vorkommen, in welchen das Wasser um einen Rechtwinkel abgelenkt wird und dasselbe in der Axe des Hahnes selbst ausfliesst, so wurde noch in das Hahnrohr *AB* ein Hahn, wie *CD* Fig. 7 Taf. II. eingesetzt, auf dessen Kopf *H* die eingetheilte Gradscheibe geschraubt werden konnte und dessen, ein Knie bildende Bohrung vollkommen abgerundet und polirt war. Der Querschnitt der Bohrung war derselbe wie bei der cylindrischen Bohrung, deshalb ist eine besondere Berechnung von dem Inhalte desselben hier nicht nöthig. Wenn übrigens die Widerstände bei diesem Hahne kleiner ausfallen als bei dem gerade gebohrten Hahne, so hat dies seinen Grund darin, dass bei diesem Hahne nur eine Verengung gebildet wird, während beim geraden Hahne deren zwei entstehen. Bei weniger Drehung, wo die Zusammenziehung des Strahles nur noch klein ist, wird allerdings im krummen Hahn der Widerstand sich grösser herausstellen als im geraden Hahn, weil hier die bedeutende Krümmung den ansehnlichsten Widerstand hervorbringt.

Übrigens wurden diese Versuche auf dieselbe Weise vorgenommen, wie die oben beschriebenen.

a) Ausfluss durch das einfache, horizontal gestellte Hahnrohr in die freie Luft.

Der Halbmesser der Ausmündung wurde 2,020 Centimeter gefunden, folglich ist der Inhalt derselben

$$a = \pi.\ (2{,}020)^2 = 12{,}819 \text{ Quadratcentimeter}$$

und

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154{,}59, \text{ wobei}$$

$$\text{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}1891889.$$

Ferner war

$$h_1 = 0{,}8020 - 0{,}0202 = 0{,}7818 \text{ Meter und}$$

$$h_2 = 0{,}7818 - 0{,}3820 = 0{,}3998 \text{ Meter,}$$

folglich die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0{,}88419 + 0{,}63230}{2}\right)^2 = 0{,}575 \text{ Meter,}$$

und der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{154{,}59 . 0{,}25189}{\tau} = \frac{38{,}951}{\tau}.$$

Bei völlig geöffnetem Hahn, also für die einfache krumme Röhre, war die Ausflusszeit

$$\tau = 56{,}5 \text{ Secunden, folglich}$$

$$\mu = \frac{38{,}951}{56{,}5} = 0{,}6892 \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 1{,}105.$$

Für den geöffneten geraden Hahn, welcher mit diesem krummen Hahne einerlei Länge

hat, wurde $\zeta = 0{,}695$ gefunden; es ist demnach der Krümmungswiderstand in diesem Rohre

$$k = (1{,}105 - 0{,}695)\,\frac{v^2}{2g}$$

$$= 0{,}410.\,\frac{v^2}{2g},$$ also einundvierzig Procent der Geschwindigkeitshöhe gleich zu setzen.

Höchst eigenthümlich war die Form des ausfliessenden Wasserstrahles, der auffallend die Form eines aus zusammengedrehten Fäden bestehenden Seiles (s. Fig. 8 Taf. II.) annahm. Wurde der Hahn gedreht, so dass eine kleinere Durchgangsöffnung entstand, so trat diese Drehung der Wasserfäden noch mehr hervor und es wurde zugleich der ganze Strahl mehr conisch, wie Fig. 9 Taf. II. vorstellt.

Folgendes ist durch die ganze Versuchsreihe gewonnen worden.

Tabelle XV.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch krumm gebohrte Hähne beim Ausfluss durch den Hahn selbst und in die freie Luft.

Drehwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit t in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	$56\frac{1}{2}$	0,6892 $= \mu$	2,105	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,964	$56\frac{5}{8}$	0,6877	2,115	0,010
5	0,926	57	0,6832	2,143	0,038
$7\frac{1}{2}$	0,888	$57\frac{3}{4}$	0,6743	2,199	0,094
10	0,850	59	0,6600	2,296	0,191
$12\frac{1}{2}$	0,811	$61\frac{1}{4}$	0,6358	2,474	0,369
15	0,772	$63\frac{1}{2}$	0,6132	2,659	0,554
$17\frac{1}{2}$	0,732	66	0,5900	2,873	0,768
20	0,692	$68\frac{1}{2}$	0,5684	3,094	0,989
$22\frac{1}{2}$	0,652	$71\frac{1}{2}$	0,5446	3,371	1,266
25	0,613	$75\frac{3}{4}$	0,5141	3,784	1,679
$27\frac{1}{2}$	0,573	$81\frac{1}{4}$	0,4793	4,354	2,249
30	0,535	$87\frac{1}{2}$	0,4450	5,049	2,944
$32\frac{1}{2}$	0,496	96	0,4056	6,078	3,973
35	0,458	107	0,3639	7,550	5,445
$37\frac{1}{2}$	0,421	$119\frac{1}{2}$	0,3259	9,418	7,313
40	0,385	$132\frac{3}{4}$	0,2933	11,621	9,516
$42\frac{1}{2}$	0,349	149	0,2613	14,641	12,536
45	0,315	$167\frac{3}{4}$	0,2321	18,558	16,453
$47\frac{1}{2}$	0,282	190	0,2050	23,807	21,702
50	0,250	$216\frac{1}{2}$	0,1799	30,911	28,816
$52\frac{1}{2}$	0,220	$253\frac{1}{2}$	0,1536	42,379	40,274
55	0,190	$289\frac{1}{2}$	0,1345	55,271	53,166
$57\frac{1}{2}$	0,163	$334\frac{1}{2}$	0,1164	73,789	71,684
60	0,137	$394\frac{1}{2}$	0,0987	102,63	100,53
$62\frac{1}{2}$	0,113	476	0,0818	149,42	147,32
65	0,091	590	0,0660	229,56	227,46
$67\frac{1}{2}$	0,071	745	0,0523	366,03	363,93
70	0,052	975	0,0399	626,91	624,81

Bei 70° Stellung war der Strahl hohl; anfangs bedeckte er die ganze innere Cylinderfläche, später aber (nach 660 Secunden) schloss er sich nur an einen Theil dieser Fläche an.

Will man den Widerstand der Hahnverengung mit Berücksichtigung des Krümmungswiderstandes wissen, so hat man zu dem, in der letzten Columne enthaltenen, Widerstandscoefficienten den Coefficient 0,410 zu addiren, z. B. für $\varphi = 20°$ ist nach obiger Tabelle der Coefficient für die blosse Verengung $= 0,989$; also für die Verengung und Krümmung $0,989 + 0,410 = 1,399$. Beim gerad gebohrten Hahne wurde 1,590 gefunden. Für $\varphi = 30°$ ist nach oben $\zeta = 2,944$, also für den ganzen Hahn $= 3,354$, für den geraden Hahn aber $\zeta = 5,490$. Es ist also bei dem krumm gebohrten Hahn (mit einer Verengung) der Widerstand immer kleiner als beim, zwei Verengungen bildenden, geradgebohrten Hahne.

Wahrscheinlich hörte bei 55° Hahnstellung und mehr der volle Ausfluss schon auf, weil hier die Reihe der Widerstandscoefficienten einen Sprung macht. Aus diesem Grunde sind denn auch für diese Stellungen die Ausflusscoefficienten unter der Voraussetzung, dass die Verengung im Hahne die Ausflussmündung ist, berechnet und in folgender kleinen Tabelle zusammengestellt worden.

Fortsetzung von Tab. XV.

Stellwinkel φ in Graden.	55	$57\frac{1}{2}$	60	$62\frac{1}{2}$	65	$67\frac{1}{2}$	70
Ausflusscoefficient α_1.	0,707	0,716	0,720	0,725	0,727	0,741	0,761

Es ist aus schon früher angeführten Gründen anzunehmen, dass diese Ausflusscoefficienten ziemlich nahe die entsprechenden Contractionscoefficienten angeben. Dass wir dieselben weit grösser (0,70 bis 0,76) als beim Durchgang durch die Mündung in der dünnen Wand finden, hat seinen Grund darin, dass hier der Wasserstrahl nur zum Theil und überhaupt weniger contrahirt wird.

β) Ausfluss durch eine, an den Hahn angeschobene und horizontal gestellte Eisenröhre, in die freie Luft.

Da das Wasser durch die kurze Hahnbohrung sehr divergirend ausfloss, so wurde auch noch die oft erwähnte Eisenröhre angesteckt, und eine ganze Reihe von Versuchen beim Ausfluss durch diese angestellt.

Hier war $a = 12,832$ Quadratcentimeter und

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154,44, \text{ wie früher.}$$

Ferner wurde gefunden

$$h_1 = 0,8020 - 0,0202 = 0,7818 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0,7818 - 0,3818 = 0,4000 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = \left(\frac{0,88419 + 0,63245}{2}\right)^2 = 0,575 \text{ Meter},$$

und

$$\mu = \frac{154,22.\ 0,25174}{\tau} = \frac{38,878}{\tau}.$$

Bei geöffnetem Hahne war $\tau = 60\frac{1}{4}$ Secunden, daher für diesen Fall

$$\mu = \frac{38,878}{60,25} = 0,6453 \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 1{,}402.$$

Bei dem geraden Hahne mit Ansteckröhre fanden wir $\zeta = 1{,}068$; folglich kommt auf die Krümmung im Hahne:

1,402 — 1,068 = 0,334, während wir vorher = 0,410 gefunden haben. Diese Differenz mag grossentheils darin ihren Grund haben, dass durch Ansteckröhre das Wasser regelmässiger und in weniger gedrehten Fäden ausströmte als durch die blosse Hahnbohrung.

Folgendes ist durch die ganze Versuchsreihe gewonnen worden.

Tabelle XVI.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch krumm gebohrte Hähne beim Ausfluss durch eine lange Ansatzröhre in die freie Luft.

Stellwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$
0	1,000	60¼	0,6453 = μ	2,402	0,000
2½	0,964	60$\frac{5}{16}$	0,6445	2,407	0,005
5	0,926	60½	0,6426	2,422	0,020
7½	0,888	61	0,6373	2,462	0,060
10	0,850	62½	0,6220	2,584	0,182
12½	0,811	64¼	0,6051	2,731	0,329
15	0,772	66½	0,5846	2,926	0,524
17½	0,732	68¾	0,5655	3,127	0,725
20	0,692	71	0,5476	3,335	0,933
22½	0,652	74	0,5254	3,623	1,221
25	0,613	78½	0,4953	4,077	1,675
27½	0,573	84	0,4628	4,668	2,266
30	0,535	90	0,4320	5,359	2.957
32½	0,496	98	0,3967	6,354	3,952
35	0,458	106½	0,3650	7,504	5,102
37½	0,421	117	0,3323	9,057	6,655
40	0,385	130½	0,2979	11,267	8,865
42½	0,349	147	0,2645	14,297	11,895
45	0,315	165	0,2356	18,012	15,610
47½	0,282	186	0,2090	22,889	20,487
50	0,250	209	0,1860	28,900	26,498
52½	0,220	238	0,1634	37,476	35,074
55	0,190	275	0,1414	50,034	47,632
57½	0,163	316	0,1230	66,064	63,662
60	0,137	374	0,1040	92,543	90,141
62½	0,113	455	0,0855	136,97	134,57
65	0,091	574½ *)	0,0677	218,36	215,96
67½	0,071	730	0,0533	252,57	250,17
70	0,052	982 **)	0,0396	638,00	635,60

*) Der Ausfluss war anfänglich noch voll, doch erfolgte er sehr stossweise; später zog sich der ausgefüllte Querschnitt im Rohr immer weiter und weiter zurück, und es mochte gegen Ende des Versuches ein voller Ausfluss wohl nicht mehr statt finden.

**) Das ausfliessende Wasser bedeckte nur den untern Theil der Röhrenwand, floss also nicht voll aus.

Im Ganzen stimmen die hier gewonnenen Resultate mit denen in Tab. XV. aufgeführten gut überein. Bei $\varphi = 15^\circ$ wurde hier $\zeta = 0{,}524$, dort $= 0{,}554$, bei $\varphi = 20^\circ$ hier $= 0{,}933$, dort $\zeta = 0{,}989$, bei $\varphi = 30^\circ$ hier $\zeta = 2{,}957$, dort $= 2{,}944$ u. s. w. gefunden. Wenn sich beim Ausfluss durch die lange Röhre ein kleinerer Widerstand herausstellt als beim Ausfluss durch die kurze Hahnbohrung, so hat dies sicherlich in dem regelmässigeren Ausfluss durch die lange Röhre seinen Grund.

γ) Ausfluss durch eine, an den Hahn gesteckte Eisenröhre und unter Wasser.

Die Versuche mit einem vorgesetzten Wasserkasten wurden nur mit der kleinen Ausflusswassermenge angestellt; sie konnten erst bei einer Hahnstellung von 35 Grad ihren Anfang nehmen, weil bei mehr geöffnetem Hahn das Wasser in diesem Kasten nicht ruhig genug blieb. Da der Querschnitt der Ausmündung der vorige ist, so bleibt

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154{,}44.$$

Dagegen war der anfängliche Vertikalabstand beider Wasserspiegel von einander, d. i.

$h_1 = 0{,}6235$ Meter, und dieser Abstand am Ende der Ausflusszeit

$h_2 = 0{,}6235 - 0{,}1451 = 0{,}4784$ Meter, folglich der mittlere Niveauabstand

$$h = \left(\frac{0{,}78962 + 0{,}69166}{2}\right)^2 = 0{,}549 \text{ Meter.}$$

Der Ausdruck für den Ausflusscoefficienten ist hiernach

$$\mu = \frac{154{,}44\,(0{,}78962 - 0{,}69166)}{\tau}$$

$$= \frac{15{,}128}{\tau}.$$

Bei 35° Hahnstellung war die Ausflusszeit $\tau = 43\tfrac{1}{2}$ Secunden, folglich

$$\mu = \frac{15{,}128}{43{,}5} = 0{,}3478 \text{ und}$$

$$\zeta = 8{,}268.$$

Nimmt man für den geöffneten Hahn den Widerstandscoefficienten $= 2{,}402$ an, so erhält man den Widerstandscoefficienten für diese Hahnstellung:

$= 8{,}268 - 2{,}402 = 5{,}866$, wozu man auch eigentlich noch den Krümmungswiderstand $= 0{,}334$ rechnen sollte, weshalb also für den vollständigen Widerstand der Coefficient

$$5{,}866 + 0{,}334 = 6{,}200$$

sich ergibt.

Wenn die vorigen Tabellen für 35° Hahnstellung die kleineren Widerstandscoefficienten

$5{,}445 + 0{,}410 = 5{,}845$ und

$5{,}102 + 0{,}334 = 5{,}436$ geben, so möchte die Abweichung hauptsächlich darin zu suchen sein, dass das Wasser im vorgesetzten Kasten noch nicht ruhig genug war. Bei höheren Hahnstellungen, wo das Unterwasser ruhiger bleibt, möchte deshalb eine grössere Übereinstimmung zu erwarten sein. In folgender Tabelle sind die gewonnenen Resultate dieser Versuche zusammengestellt.

Tabelle XVII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch krumm gebohrte Hähne beim Ausfluss durch eine lange Ansatzröhre unter Wasser.

Stellwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$
35	0,458	43½ *)	0,3478	8,268	5,866
37½	0,421	47½ *)	0,3185	9,858	7,456
40	0,385	52 *)	0,2909	11,814	9,412
42½	0,349	58½	0,2586	14,953	12,551
45	0,315	65½	0,2310	18,745	16,343
47½	0,282	74½	0,2031	24,250	21,848
50	0,250	83	0,1823	30,100	27,698
52½	0,220	94	0,1609	38,607	36,205
55	0,190	109	0,1388	51,911	49,509
57½	0,163	128½	0,1177	72,146	69,744
60	0,137	153½	0,0986	102,95	100,55
62½	0,113	184	0,0822	147,93	145,53
65	0,091	234	0,0647	239,24	236,84
67½	0,071	299	0,0506	390,61	388,21
70	0,052	406	0,0323	720,21	717,81
72½	0,036	582½	0,0260	1482,5	1480,1
75	0,023	957	0,0158	4001,6	3999,2

*) Das Unterwasser war noch in wallender Bewegung.

δ) Ausfluss durch die blosse, vertikal abwärts gerichtete Hahnbohrung.

Bei einer anderen Versuchsreihe über den Ausfluss durch den krumm gebohrten Hahn wurde dessen Bohrung in der Axenrichtung vertikal abwärts gestellt, und eben dadurch die Druckhöhe um die untere Hälfte (0,1275 Meter) der Hahnlänge vergrössert. Übrigens führte man diese Versuche genau so wie die vorigen durch. Bei 40° Hahnstellung und darüber floss das Wasser wieder schneller aus als bei den nächst tieferen Hahnstellungen, weshalb hier der volle Ausfluss durch die Hahnmündung aufgehört haben musste. Für die Versuche bei 40° Hahnstellung u. s. w. durfte deshalb die untere Hälfte der Hahnbohrung nicht mit zur Druckhöhe gerechnet werden. Dies sieht man auch vollkommen überzeugend aus dem stetigen Steigen der gewonnenen Coefficienten, welches aber aufhört, wenn man immer eine und dieselbe Druckhöhe annimmt. Übrigens deutet die Übereinstimmung der erhaltenen Widerstandscoefficienten mit den in Tab. XV. aufgeführten darauf hin, dass der Ausfluss durch den Hahnkopf selbst bei allen diesen Versuchen noch ein voller ist, und dass sich das Wasser erst beim Herabfallen durch den vertikal gestellten Theil der Hahnbohrung von der Wandfläche desselben abgezogen hat. Bei den mit * bezeichneten Coefficienten ist die vollständige Druckhöhe zum Grunde gelegt worden, um die daraus resultirenden Abweichungen vor Augen zu führen.

Es ist hier, wie bei früheren Versuchen

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154,59.$$

Für Stellwinkel von 0 bis $37\frac{1}{2}^0$ war

$h_1 = 0,8025 + 0,1275 = 0,9300$ Meter und

$h_2 = 0,9300 - 0,3820 = 5480$ Meter, folglich

$$h = \left(\frac{0,96436 + 0,74027}{2}\right)^2 = 0,726 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{154,59.\ 0,22409}{\tau} = \frac{34,643}{\tau}.$$

Bei geöffnetem Hahne war $\tau = 50$ Secunden, folglich

$\mu_1 = 0,6929$ und

$\zeta_1 = 1,083$.

Für Stellwinkel von 40^0 und mehr war

$h_1 = 0,8025 - 0,0202 = 0,7823$ Meter,

$h_2 = 0,7823 - 0,3820 = 0,4003$ Meter, folglich

$$h = \left(\frac{0,88448 + 0,63269}{2}\right)^2 = 0,575 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{38,925}{\tau}.$$

Bei 40^0 Hahnstellung war $\tau = 134$ Secunden, folglich

$$\mu_1 = \frac{38,925}{134} = 0,2905 \text{ und}$$

$\frac{1}{\mu_1^2} = 11,85$, endlich hiervon den früher gefundenen Coefficienten $\zeta = 2,10$ für den geöffneten Hahn abgezogen, folgt der entsprechende Widerstandscoefficient $\zeta_1 = 9,75$.

Tabelle XVIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch krumm gebohrte Hähne beim Ausfluss durch das vertikal abwärts gestellte Ende der Hahnbohrung.

Stellwinkel φ in Graden.	Querschnitts-verhältniss $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	50	0,6929 = μ	2,083 2,105 **)	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,964	$50\frac{1}{8}$	0,6911	2,093	0,010
5	0,926	$50\frac{1}{2}$	0,6860	2,125	0,042
$7\frac{1}{2}$	0,888	51	0,6793	2,167	0,084
10	0,850	$52\frac{1}{2}$	0,6599	2,297	0,214
$12\frac{1}{2}$	0,811	$54\frac{1}{2}$	0,6357	2,475	0,392
15	0,772	$56\frac{1}{2}$	0,6132	2,660	0,577
$17\frac{1}{2}$	0,732	$58\frac{1}{2}$	0,5922	2,852	0,769
20	0,692	$60\frac{3}{4}$	0,5703	3,075	0,992
$22\frac{1}{2}$	0,652	$63\frac{1}{2}$	0,5456	3,360	1,217
25	0,613	67	0,5171	3,741	1,658
$27\frac{1}{2}$	0,573	71	0,4879	4,200	2,117
30	0,535	$77\frac{1}{2}$	0,4470	5,005	2,922
$32\frac{1}{2}$	0,496	85	0,4076	6,020	3,937
35	0,458	94	0,3686	7,362	5,279
$37\frac{1}{2}$	0,421	$106\frac{1}{2}$	0,3253	9,451	7,368
40	0,385	134	0,2905 0,2585 *)	11,85 14,96 *)	9,75 12,88 *)
$42\frac{1}{2}$	0,349	$154\frac{1}{2}$	0,2520 0,2242 *)	15,74	13,64
45	0,315	$172\frac{3}{4}$	0,2254 0,2005 *)	19,68	17,58
$47\frac{1}{2}$	0,282	$193\frac{1}{2}$	0,2012 0,1790 *)	24,69	22,59
50	0,250	220	0,1770	31,92	29,82
$52\frac{1}{2}$	0,220	253	0,1539	42,21	40,11
55	0,190	$288\frac{1}{2}$	0,1350	54,89	52,79
$57\frac{1}{2}$	0,163	330	0,1180	71,82	69,72
60	0,137	395	0,0986	102,90	100,80
$62\frac{1}{2}$	0,113	470	0,0828	145,68	143,58
65	0,091	581	0,0670	222,61	220,51

*) Hier ist die vollständige Druckhöhe vorausgesetzt worden.
**) Bezieht sich auf die kleinere Druckhöhe (s. Tab. XV.)

Die Übereinstimmung der in der letzten Tabelle aufgeführten Widerstandscoefficienten mit denen in Tab. XV. lässt wenig zu wünschen übrig.

ε) Ausfluss durch das an das Hahnende angeschobene und vertikal abwärts gestellte Eisenrohr.

Bei diesen Versuchen war, wie früher

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154,44.$$

Bei Hahnstellungen unter 40° fand voller Ausfluss statt, weshalb bei diesen Versuchen die Länge der Ansteckröhre der Druckhöhe einzurechnen ist. Aus diesem Grunde hat man

$$h_1 = 0{,}8025 + 0{,}7075 = 1{,}5100 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 1{,}5100 - 0{,}3817 = 1{,}1283 \text{ Meter, demnach}$$

$$h = \left(\frac{1{,}22882 + 1{,}06221}{2}\right)^2 = \left(\frac{2{,}29103}{2}\right)^2 = 1{,}312 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{154{,}44.\ 0{,}16661}{\tau} = \frac{25{,}730}{\tau}.$$

Bei geöffnetem Hahne war $\tau = 40\frac{1}{2}$ Secunden, daher

$$\mu = \frac{25{,}730}{40{,}5} = 0{,}6353 \text{ und}$$

$$\zeta = 1{,}477.$$

Bei Stellung des Hahnes auf 40° trat Folgendes ein. Bei einem Versuche hörte der volle Ausfluss nach 48 Secunden auf, welches dadurch zu erkennen war, dass der vorher conisch divergente Wasserstrahl Fig. 10 Taf. II. plötzlich cylindrisch wurde wie Fig. 11. Bei einem zweiten Versuche blieb der volle Ausfluss, und es dauerte die Ausflusszeit nur 92 Secunden, während sie beim vorigen Versuche 105 Secunden war. Bei stärkerer Drehung des Hahnes wurde der Wasserstrahl conisch convergent und erhielt eine Spalte, wie Fig. 12 bei 45°. Bei 50° war der Strahl deutlich hohl und gedreht, wie Fig. 13.

Für die Versuche bei $42\frac{1}{2}$° Hahndrehung und mehr muss die Druckhöhe unberücksichtigt bleiben, weshalb für dieselben ist

$$h_1 = 0{,}8005 - 0{,}0202 = 0{,}7803 \text{ Meter},$$

$$h_2 = 0{,}7803 - 0{,}3825 = 0{,}3978 \text{ Meter, daher}$$

$$h = \left(\frac{0{,}88334 + 0{,}63071}{2}\right)^2 = 0{,}573 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{154{,}59.\ 0{,}25263}{\tau} = \frac{39{,}055}{\tau}.$$

Für $42\frac{1}{2}$° Hahnstellung wurde $\tau = 157$ Secunden beobachtet, weshalb hierzu

$$\mu = \frac{39{,}055}{\tau} = 0{,}2488 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 16{,}160, \text{ so wie}$$

$$\zeta = 16{,}160 - 2{,}105 = 14{,}055$$

gefunden wird.

Folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der übrigen Versuche.

Tabelle XIX.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch krumm gebohrte Hähne beim Ausfluss durch eine lange, vertikal abwärts gestellte Röhre in die freie Luft.

Drehwinkel φ in Graden.	Querschnitts-verhältniss $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
0	1,000	$40\frac{1}{2}$	0,6353 $= \mu$	2,477 / 2,105 *)	0,000
$2\frac{1}{2}$	0,964	$40\frac{5}{8}$	0,6334	2,493	0,016
5	0,926	41	0,6276	2,539	0,062
$7\frac{1}{2}$	0,888	$41\frac{3}{4}$	0,6163	2,633	0,156
10	0,850	$42\frac{1}{2}$	0,6054	2,728	0,251
$12\frac{1}{2}$	0,811	$43\frac{1}{2}$	0,5915	2,858	0,381
15	0,772	$44\frac{3}{4}$	0,5750	3,025	0,548
$17\frac{1}{2}$	0,732	46	0,5594	3,196	0,719
20	0,692	48	0,5361	3,480	1,003
$22\frac{1}{2}$	0,652	$50\frac{1}{2}$	0,5095	3,852	1,375
25	0,613	53	0,4855	4,243	1,766
$27\frac{1}{2}$	0,573	$56\frac{1}{2}$	0,4554	4,822	2,345
30	0,535	61	0,4218	5,620	3,143
$32\frac{1}{2}$	0,496	$65\frac{1}{2}$	0,3928	6,480	4,003
35	0,458	$71\frac{1}{2}$	0,3599	7,722	5,245
$37\frac{1}{2}$	0,421	$80\frac{1}{2}$	0,3196	9,788	7,311
40	0,385	92	0,2797	12,78	10,30
$42\frac{1}{2}$	0,349	157	0,2488	16,16	14,06
45	0,315	$173\frac{1}{2}$	0,2251	19,74	17,64
$47\frac{1}{2}$	0,282	$197\frac{1}{2}$	0,1977	25,57	23,47
50	0,250	222	0,1759	32,32	30,22
$52\frac{1}{2}$	0,220	253	0,1544	41,97	39,87
55	0,190	$294\frac{1}{2}$	0,1326	56,86	54,76

*) Bezieht sich auf die kleinere Druckhöhe für die Stellwinkel von $42\frac{1}{2}$ Grad und grösser.

C. Versuche über den Ausfluss durch Drehklappen (Drosselventile).

1) Ausfluss durch die rectanguläre Drehklappe im parallelepipedischen Rohre.

Die Einrichtung eines solchen Drehklappenapparates führt Fig. 14 Taf. II. vor Augen. *AB* ist die 32 Centimeter lange, im Lichten 5 Centimeter weite und $2\frac{1}{2}$ Centimeter hohe Röhre; *C* die Axe, *DE* die geöffnete Drehklappe und *H* der Kopf, worauf der eingetheilte Kreis geschraubt wird. Das Einstellen erfolgte durch einen Schlüssel, welcher in eine Spur im Halse *F* der Spindel eingriff. und das Feststellen wurde durch die Pressschraube *G* bewirkt. Die Drehklappe selbst war

4 Millimeter dick, der Durchmesser ihrer Spindel mass aber 6 Millimeter und der Durchmesser ihrer Fassung 11 Millimeter. Die Ausflusszeit τ ohne Klappe war 50,4 Secunden, bei eingesetzter und völlig geöffneter Klappe betrug dieselbe 54 Secunden. Bei einem anderen Versuche mit einer circa nur halb so dicken Spindel war die Ausflusszeit nur 53 Secunden; diese Spindel zeigte sich aber zu schwach und gab wegen ihrer Torsion nicht ganz sichere und übereinstimmende Resultate; doch wichen im Mittel dieselben von den unten stehenden nur wenig ab.

Bei der Berechnung der Querschnittsverhältnisse ist auf die Dicke der Klappe nicht Rücksicht genommen, es ist dieselbe vielmehr als ein dünnes Blech angesehen worden. Aus diesem Grunde hat man dieses Verhältniss

$\frac{a_1}{a} = 1 - \sin \varphi$, wo φ den Stellwinkel bezeichnet, setzen können. Einen zusammengesetzteren Ausdruck würde man bei Berücksichtigung der Dicke erhalten, da aber diese Versuche auch aus andern Gründen nicht so allgemein anwendbar und nicht so genau sein können als die mit Schiebern und Hähnen, so konnte man sich von dieser schärferen Rechnung dispensiren.

a) Ausfluss durch das einfache Klappenrohr.

Bei diesen Versuchen war der Inhalt der Ausmündung

$a = 12{,}435$ Quadratcentimeter, folglich

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981{,}7}{12{,}435} = 159{,}36 \text{ und } \mathrm{Log}\left(\frac{2A}{a\sqrt{2g}}\right) = 2{,}2023972.$$

Ferner wurde gefunden

$$h_1 = 0{,}7949 - 0{,}0124 = 0{,}7825 \text{ Meter,}$$

$$h_2 = 0{,}7825 - 0{,}3820 = 0{,}4005 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = \left(\frac{0{,}88459 + 0{,}63285}{2}\right)^2 = 0{,}576 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{159{,}36 . 0{,}25174}{\tau} = \frac{40{,}119}{\tau}.$$

Bei völlig geöffneter Klappe war $\tau = 54$ Secunden, folglich ist für diesen Fall

$$\mu = \frac{40{,}119}{54} = 0{,}7429 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 1{,}812.$$

Ohne Klappe, also das blosse Rohr, bei verschlossenen Axenlöchern, war $\tau = 50{,}4$ Secunden, folglich

$$\mu = \frac{40{,}119}{50{,}4} = 0{,}7960 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 1{,}578.$$

Es ist sonach der Widerstandscoefficient für die blosse, übrigens völlig geöffnete Klappe:

$$\zeta = 1{,}812 - 1{,}578 = 0{,}234.$$

Folgendes ist durch die ganze Versuchsreihe gefunden worden.

Tabelle XX.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch rectanguläre Drehklappen im parallelepipedischen Rohre.

Drehwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt der Verengung $\frac{a_1}{a} = 1 - \sin\varphi$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausfluss-coefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	1	50,4	0,7960 = μ	1,578	0,000
0	1	54	0,7429	1,812	0,234
$2\frac{1}{2}$	0,956	54,3	0,7388	1,832	0,254
5	0,913	54,9	0,7308	1,873	0,295
$7\frac{1}{2}$	0,869	$55\frac{1}{2}$	0,7229	1,914	0,336
10	0,826	$56\frac{3}{4}$	0,7069	2,001	0,423
$12\frac{1}{2}$	0,784	$59\frac{1}{4}$	0,6771	2,181	0,603
15	0,741	$61\frac{3}{4}$	0,6497	2,369	0,791
$17\frac{1}{2}$	0,699	$64\frac{1}{2}$	0,6220	2,585	1,007
20	0,658	$68\frac{1}{2}$	0,5857	2,915	1,337
$22\frac{1}{2}$	0,617	$73\frac{1}{4}$	0,5477	3,334	1,756
25	0,577	$78\frac{1}{4}$	0,5127	3,804	2,226
$27\frac{1}{2}$	0,538	84	0,4776	4,384	2,806
30	0,500	91	0,4409	5,145	3,567
$32\frac{1}{2}$	0,463	$99\frac{1}{2}$	0,4032	6,151	4,573
35	0,426	$109\frac{1}{2}$	0,3664	7,449	5,871
$37\frac{1}{2}$	0,391	121	0,3316	9,096	7,518
40	0,357	$133\frac{1}{2}$	0,3005	11,073	9,495
		151*)	0,2657	14,166	12,588
$42\frac{1}{2}$	0,324	$159\frac{1}{2}$**)	0,2515	15,806	14,228
		163***)	0,2461	16,507	14,929

*) Der volle Ausfluss hörte nach 125 Secunden auf,
**) desgl. nach 84 Secunden,
***) desgl. nach 30 Secunden.

Bei $41\frac{1}{4}$ Grad Stellung, wo $\frac{a_1}{a} = 0{,}341$, war ebenfalls der Ausfluss noch voll; es war $\tau = 141\frac{1}{2}$ Secunden, daher

$$\mu_1 = 0{,}2835,\ \frac{1}{\mu_1^2} = 12{,}440 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 10{,}862.$$

Der Ausfluss bei ungefülltem Querschnitt des Rohres wurde mit der kleineren Ausflussmenge angestellt.

Hier war wieder

$$h_1 = 0{,}7825 \text{ Meter, dagegen}$$

$$h_2 = 0{,}7825 - 0{,}1452 = 0{,}6373 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = \left(\frac{0{,}88459 - 0{,}79831}{2}\right)^2 \doteq 0{,}708 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{159{,}36.\ 0{,}08628}{\tau} = \frac{13{,}750}{\tau}$$

Für $\varphi = 40$ Grad war $\tau = 46$ Secunden, daher

$$\mu = \frac{13,750}{46} = 0,2989 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 11,192, \text{ weshalb}$$

$\zeta = 11,192 - 1,578 = 9,614$ folgt, während nach obiger Tabelle $\zeta = 9,495$ ist.

Folgendes ist durch die Beobachtungen bei höheren Hahnstellungen gewonnen worden.

Fortsetzung von Tab. XX.

φ	$\frac{a_1}{a}$	τ	μ_1	$\frac{1}{\mu_1^2}$	$\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$
40	0,357	46	0,2989	11,192	9,614
42½	0,325	50 *)	0,2750	13,223	11,645
		54 **)	0,2546	15,423	13,845
		57½ ***)	0,2391	17,487	15,909

			μ_1	α_1
45	0,293	65	0,2115	0,722
47½	0,263	71	0,1937	0,737
50	0,234	79½	0,1730	0,739
52½	0,207	89	0,1545	0,748
55	0,181	100½	0,1368	0,757
57½	0,157	115	0,1196	0,763
60	0,134	131	0,1050	0,783
62½	0,113	151½	0,0908	0,803
65	0,094	180	0,0764	0,815
67½	0,076	221½	0,0621	0,817
70	0,060	267	0,0515	0,854
72½	0,046	363	0,0379	0,818
75	0,034	488½	0,0282	0,827

*) Voller Ausfluss,

**) nach 34 Secunden hörte der volle Ausfluss auf,

***) nach 10 Secunden desgl.

Fig. 15 Tab. II. zeigt in a den Querschnitt des ausfliessenden Strahles bei 50 Grad und in b denselben bei 70 Grad Klappenstellung.

Die in der letzten Columne aufgeführten Ausflusscoefficienten beziehen sich auf den Querschnitt a_1 der beiden Klappendurchgänge zusammen.

b) Ausfluss durch die lange eiserne Ansatzröhre.

Um auch bei höheren Stellungen der Drehklappe, also bei bedeutenden Verengungen einen vollen Ausfluss des Wassers zu erzwingen, wurde die eiserne Röhre an das messingene Rohr, worin die Klappe befindlich ist, angesteckt. Die dabei erhaltenen Beobachtungsresultate waren folgende.

Es blieb, wie früher, $a = 12,49$ Quadratcentimeter, und

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 158,66.$$

Auch war $h_1 = 0,7825$ und

$h_2 = 0{,}4005$, folglich

$h = 0{,}576$ Meter und

$$\mu = \frac{39{,}942}{\tau}.$$

Bei geöffneter Klappe wurde $\tau = 60$ Secunden beobachtet, deshalb war für diese Stellung

$$\mu_1 = \frac{39{,}942}{60} = 2{,}257 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^2} = 0{,}6657.$$

Ohne Klappe, bei verschlossenen Axenlöchern, fand man $\tau = 56\frac{1}{2}$ Secunden, weshalb für die blosse Röhre

$$\mu = \frac{39{,}942}{56{,}5} = 0{,}7069 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 2{,}001$$

folgt.

Der geöffneten Klappe allein entspricht also der Widerstandscoefficient

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 2{,}257 - 2{,}001 = 0{,}256.$$

Vorher wurde er $= 0{,}234$ gefunden.

In folgender Tabelle sind die Ergebnisse der ganzen Versuchsreihe zusammengestellt.

Tabelle XXI.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch die rectangnläre Drehklappe im verlängerten parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel φ in Graden.	Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	1,000	$56\frac{1}{2}$	0,7069	2,001	0,000
0	1,000	60	0,6657	2,257	0,256
$2\frac{1}{2}$	0,956	$60\frac{1}{8}$	0,6643	2,266	0,265
5	0,913	$60\frac{3}{8}$	0,6616	2,285	0,284
$7\frac{1}{2}$	0,869	$60\frac{1}{4}$	0,6521	2,352	0,351
10	0,826	$62\frac{1}{2}$	0,6391	2,449	0,448
$12\frac{1}{2}$	0,784	64	0,6241	2,567	0,566
15	0,741	$66\frac{1}{2}$	0,6006	2,772	0,771
$17\frac{1}{2}$	0,699	$69\frac{1}{2}$	0,5747	3,028	1,027
20	0,658	73	0,5472	3,340	1,339
$22\frac{1}{2}$	0,617	77	0,5187	3,716	1,715
25	0,577	$81\frac{1}{2}$	0,4901	4,163	2,162
$27\frac{1}{2}$	0,538	87	0,4591	4,744	2,743
30	0,500	94	0,4249	5,539	3,538
$32\frac{1}{2}$	0,463	102	0,3916	6,521	4,520
35	0,426	111	0,3590	7,723	5,722
$37\frac{1}{2}$	0,391	$121\frac{1}{2}$	0,3287	9,253	7,252
40	0,357	134	0,2981	11,255	9,254
$42\frac{1}{2}$	0,324	$148\frac{1}{2}$	0,2609	13,823	11,822
45	0,293	166	0,2406	17,272	15,271

Der Ausfluss bei stärkerer Drehung der Klappe wurde an der kleinen Ausflussmenge beobachtet.

Es war hier

$h_1 = 0,7825$ Meter und

$h_2 = 0,6373$ Meter, folglich

$h = 0,708$ und

$\mu = \frac{13,690}{\tau}$, wie bei einem letzten Versuche.

Für $\varphi = 40^\circ$ wurde $\tau = 46$ Secunden gefunden, weshalb für diese Stellung

$\mu_1 = \frac{13,690}{46} = 0,2976,$

$\frac{1}{\mu_1^2} = 11,291$ und

$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 11,291 - 2,001 = 9,290$ folgt, während wir vorhin $\zeta = 9,254$ und früher, bei kurzem Rohre, 9,495 und 9,614 gefunden haben.

Fortsetzung von Tab. XXI.

Drehwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Werthe $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
40°	0,357	46	0,2976	11,29	9,29
42½	0,324	51	0,2684	13,88	11,88
45	0,293	56	0,2444	16,73	14,73
47½	0,263	63	0,2173	21,18	19,18
50	0,234	71	0,1928	26,90	24,90
52½	0,207	80½	0,1701	34,58	32,58
55	0,181	91½	0,1496	44,67	42,67
57½	0,157	104	0,1316	57,71	55,71
60	0,134	122	0,1122	79,42	77,42
62½	0,113	143½	0,0954	109,9	107,9
65	0,094	173½	0,0789	160,6	158,6
67½	0,076	210½	0,0650	236,4	234,4
70	0,060	263½	0,0519	370,5	368,5
72½	0,046	339*)	0,0404	613,2	611,2
75	0,035	436*)	0,0314	1014,4	1012,4

*) nicht voll ausfliessend, sondern nur die untere Fläche der Röhre bedeckend.

c) Ausfluss durch die Mündung in einem an das Ende des Klappenrohres eingesetzten Bleche.

Um für den vollen Ausfluss bei hoher Klappenstellung eine Controlle zu haben, wurde noch das Mundstück in Fig. 22 Taf. I. eingesetzt, dessen Durchgangsöffnung einen Inhalt

$a_2 = 1,9715$ Quadratcentimeter

hat.

Es war daher hier

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = \frac{1981,7}{1,9715} = 1005,2.$$

Ferner

$h_1 = 0,7825$ Meter,

$h_2 = 0,6373$ Meter, folglich

$h = 0,708$ und

$$\mu = \frac{1005,2.\ 0,08628}{\tau} = \frac{86,727}{\tau}.$$

Für $\varphi = 0°$ war $\tau = 137$ Secunden, daher

$$\mu = \frac{86,727}{137} = 0,6330 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 2,4953.$$

Für $\varphi = 40°$ war $\tau = 142\frac{1}{2}$, daher

$$\mu_1 = \frac{86,727}{142,7} = 0,6086 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 2,6997.$$

Hiernach bleibt der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch die Dreklappe, bei 40° Einstellung:

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 2,6997 - 2,4953 = 0,2044.$$

Ohne das blecherne Mundstück würde dieser sein:

$$\zeta = 0,2044 \left(\frac{a}{a_2}\right)^2 = 0,2044 \left(\frac{12,435}{1,9715}\right)^2$$

$$= 0,2044.\ 39,783 = 8,13.$$

Hierüber wurde folgende Versuchsreihe angestellt.

Tabelle XXII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch die rectanguläre Drehklappe beim Ausfluss durch eine rectanguläre Mündung im dünnen Blech.

Drehwinkel φ in Graden.	Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	Ausflusszeit τ.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^{\,2}}$.	Differenzen $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2}$.	Widerstandscoefficient $\left(\frac{a}{a_2}\right)^2 \left(\frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2}\right)$.
0	0,000	137	0,6330	2,495	0,000	0,00
40	0,357	142½	0,6086	2,700	0,204	8,13
42½	0,324	144½	0,6002	2,776	0,271	10,77
45	0,293	147	0,5900	2,873	0,378	15,02
47½	0,263	149½	0,5801	2,972	0,476	18,94
50	0,234	153	0,5669	3,112	0,617	24,54
52½	0,207	156½	0,5542	3,256	0,761	30,27
55	0,181	162	0,5354	3,489	0,994	39,54
57½	0,157	170	0,5101	3,842	1,347	53,58
60	0,134	181	0,4792	4,356	1,860	74,01
62½	0,113	199	0,4358	5,265	2,770	110,18
65	0,094	222	0,3907	6,552	4,057	161,40
67½	0,076	258½	0,3355	8,884	6,389	254,16
70	0,060	299	0,2901	11,886	9,391	373.58
72½	0,046	382	0,2270	19,401	16,905	672,55
75	0,035	498	0,1742	32,972	30,477	1212,47

Die in der letzten Columne dieser Tabelle enthaltenen Widerstandscoefficienten sind eigentlich noch um den Widerstandscoefficienten 0,234, welcher der geöffneten Klappe zukommt, zu vergrössern.

Übrigens ist die Übereinstimmung dieser Coefficienten mit den in der vorletzten Tabelle (XXI.) aufgeführten sehr zufriedenstellend und zum Theil überraschend.

8) Ausfluss durch die kreisrunde Drehklappe im cylindrischen Rohre.

Die Einrichtung dieses Ausflussapparates war im Wesentlichen ganz wie die des rectangulären Drehklappenapparates. Nur war die Klappe weniger abgerundet am Umfang und dünner als die rectanguläre; sie war nämlich am Rande 2,3 Millimeter und in der Mitte, wegen der durchgehenden Axe, 5,8 Millimeter dick. Übrigens schloss sie wasserdicht ab, was bei der rectangulären Klappe nicht ganz eintrat. Betrachtet man diese Klappe wie eine dünne Kreisscheibe, so hat man das Querschnittsverhältniss zwischen dem Durchgange und der Röhre wieder

$$\frac{a_1}{a} = 1 - \sin\varphi,$$

denn während der Röhrenquerschnitt den Inhalt $a = \pi r^2$ hat, ist bei φ^0 Stellung die Projection der Klappe winkelrecht zur Axe des Rohres eine Ellipse vom Inhalte $\pi r^2 \sin\varphi$, also der Inhalt der beiden mondförmigen Durchgänge $a_1 = \pi r^2 - \pi r^2 \sin\varphi = (1 - \sin\varphi)\, a$. Es bleiben also die Querschnittsberechnungen die früheren.

a) Ausfluss durch das einfache Klappenrohr.

Es war der Querschnitt der Ausmündung des Rohres

$a = 12,768$ Quadratcentimeter, folglich

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 155,21.$$

Ferner ergab sich

$h_1 = 0,7975 - 0,0202 = 0,7773$ Meter,

$h_2 = 0,7773 - 0,3820 = 0,3953$ Meter, demnach

$$h = \left(\frac{0,88165 + 0,62873}{2}\right)^2 = 0,750 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{155,21 .\ 0,25292}{\tau} = \frac{39,256}{\tau}.$$

Bei völlig geöffneter Drehklappe war $\tau = 53$ Secunden, folglich

$$\mu_1 = \frac{39,256}{53} = 0,7407 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 1,823.$$

Ohne Klappe, bei verschlossenen Axenlöchern, ergab sich

$\tau = 50\frac{1}{4}$ Secunden, folglich

$$\mu = \frac{39,256}{50,25} = 0,7812 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 1,639.$$

Es ist demnach der Widerstandscoefficient für die blosse, aber völlig geöffnete Klappe:

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 1{,}823 - 1{,}639 = 0{,}184.$$

Die Resultate der ganzen Versuchsreihe gibt folgende Tabelle.

Tabelle XXIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch die kreisrunde Drehklappe im cylindrischen Rohre und den Ausfluss durch das einfache Rohr.

Drehwinkel φ in Graden.	Relativer Querschnitt $\frac{a_1}{a}$ der Verengung.	Ausflusszeit t in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Werthe $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	1,000	50¼	0,7812 = μ	1,639	0,000
0	1,000	53	0,7407	1,823	0,184
2½	0,956	53¼	0,7372	1,840	0,201
5	0,913	54¼	0,7236	1,910	0,271
7½	0,869	55¾	0,7041	2,017	0,378
10	0,826	57½	0,6827	2,145	0,506
12½	0,784	60	0,6543	2,336	0,697
15	0,741	62¾	0,6256	2,555	0,916
17½	0,699	65¾	0,5970	2,805	1,166
20	0,658	69½	0,5648	3,135	1,496
22½	0,617	74	0,5305	3,554	1,915
25	0,577	79½	0,4938	4,101	2,462
27½	0,538	86	0,4565	4,799	3,160
30	0,500	93¾	0,4187	5,703	4,064
32½	0,463	101½	0,3868	6,685	5,046
35	0,426	112¼	0,3497	8,177	6,538
37½	0,391	124	0,3166	9,978	8,339
40	0,357	137	0,2865	12,180	10,541
42½	0,324	152½	0,2574	15,092	13,453
45	0,293	172	0,2282	19,198	17,559
47½	0,263	194	0,2023	24,423	22,784
50	0,234	222	0,1768	31,982	30,343
52½	0,207	255	0,1539	42,196	40,557
55	0,181	298	0,1317	57,627	55,988
57½	0,157	348½ *)	0,1126	78,813	77,174
60	0,134	406 **)	0,0967	106,97	105,33
		409½ ***)	0,0959	108,82	107,18
			μ_1	α_1	
62½	0,113	501½ ****)	0,0783	0,693	
65	0,094	612½	0,0641	0,684	
67½	0,076	764	0,0514	0,675	
70	0,060	965	0,0407	0,675	
72½	0,046	1298	0,0302	0,653	

*) scheinbar noch voll ausfliessend;

**) nach 260 Secunden hörte der volle Ausfluss auf;

***) nach 180 Secunden desgleichen, vorher aber absetzend, stossend und schäumend ausfliessend;

****) nach 28 Secunden voll auszufliessen anfangend.

Fig. 16 Taf. II. repräsentirt in *a*, *b*, *c* den Querschnitt des Wasserstrahles bei 60°, 65° und 70° Klappenstellung.

Die zu Ende der Tabelle für den unvollen Ausfluss berechneten Ausflusscoefficienten (α_1) fallen innerhalb 0,65 und 0,69, sind also bedeutend kleiner als bei der rectangulären Drehklappe; was zum Theil seinen Grund darin hat, dass die runde weniger am Umfange abgerundet und dünner war als die rectanguläre Klappe. Übrigens sind auch die Widerstandscoefficienten grösser bei der runden Klappe als bei der rectangulären, wie aus Vergleichung der Tabellen XXI. und XXIII. mit einander zu ersehen ist.

b) Ausfluss durch die angeschobene Eisenröhre.

Hier war wieder $a = 12{,}832$, daher

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 154{,}44.$$

Ferner war, wie vorher

$$h_1 = 0{,}7773 \text{ und}$$
$$h_2 = 0{,}3953, \text{ also auch}$$
$$h = 0{,}570 \text{ Meter, daher}$$
$$\mu = \frac{154{,}44.\ 0{,}25292}{t} = \frac{39{,}060}{t}.$$

Bei völlig geöffneter Klappe wurde $t = 57\frac{1}{2}$ Secunden beobachtet, weshalb

$$\mu_1 = \frac{39{,}060}{57{,}5} = 0{,}6793 \text{ und}$$
$$\frac{1}{\mu_1^2} = 2{,}167$$

folgt.

Ohne Klappe war $t = 55\frac{1}{4}$ Secunden, daher

$$\mu = \frac{39{,}060}{55{,}25} = 0{,}7068 \text{ und}$$
$$\frac{1}{\mu^2} = 2{,}002.$$

Hiernach folgt der Widerstandscoefficient für die blosse Klappe, wenn sie völlig geöffnet ist:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 2{,}167 - 2{,}002 = 0{,}165,$$ während wir vorher $\zeta = 0{,}184$ gefunden haben.

Die ganze Versuchsreihe gab Folgendes.

Tabelle XXIV.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch kreisförmige Drehklappen im verlängerten cylindrischen Rohre in die freie Luft.

Drehwinkel φ in Graden.	Querschnitts-verhältniss $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	1,000	$55\frac{1}{4}$	0,7068 $= \mu$	2,002	0,000
0	1,000	$57\frac{1}{2}$	0,6793	2,167	0,165
$2\frac{1}{2}$	0,956	$57\frac{3}{4}$	0,6763	2,186	0,184
5	0,913	$58\frac{1}{2}$	0,6677	2,243	0,241
$7\frac{1}{2}$	0,869	60	0,6510	2,360	0,358
10	0,826	62	0,6300	2,520	0,518
$12\frac{1}{2}$	0,784	64	0,6103	2,685	0,683
15	0,741	$66\frac{1}{2}$	0,5874	2,899	0,897
$17\frac{1}{2}$	0,699	$69\frac{1}{2}$	0,5620	3,166	1,164
20	0,658	$73\frac{1}{2}$	0,5314	3,541	1,539
$22\frac{1}{2}$	0,617	78	0,5008	3,988	1,986
25	0,577	83	0,4706	4,515	2,513
$27\frac{1}{2}$	0,538	$88\frac{1}{2}$	0,4414	5,134	3,132
30	0,500	95	0,4112	5,915	3,913
$32\frac{1}{2}$	0,463	103	0,3792	6,954	4,952
35	0,426	112	0,3487	8,222	6,220
$37\frac{1}{2}$	0,391	126	0,3100	10,406	8,404
40	0,357	140	0,2790	12,846	10,844
$42\frac{1}{2}$	0,324	156	0,2504	15,951	13,949
45	0,293	176	0,2219	20,30	18,30
$47\frac{1}{2}$	0,263	199	0,1963	25,96	23,96
50	0,234	229	0,1706	34,37	32,37
$52\frac{1}{2}$	0,207	263	0,1485	45,34	43,34
55	0,181	308	0,1268	62,18	60,18
$57\frac{1}{2}$	0,157	358	0,1091	84,00	82,00
60	0,134	424*)	0,0921	117,83	115,83
$62\frac{1}{2}$	0,113	508**)	0,0769	169,15	167,15
65	0,094	640***)	0,0610	268,47	266,47
$67\frac{1}{2}$	0,076	890****)	0,0439	519,18	517,18
70	0,060	1283	0,0304	1078,9	1076,9

*) pfeifend und gegen das Ende der Ausflusszeit gurgelnd ausfliessend;
**) nach 285 Secunden gurgelnd, nach 335 Secunden hörte der volle Ausfluss auf;
***) nach 90 Secunden gurgelnd, nach 130 Secunden unvoller Ausfluss eintretend;
****) ohne Anschluss.

Im Ganzen ist die Übereinstimmung der Widerstandscoefficienten in Tab. XXIII. und Tab. XXIV. sehr zufriedenstellend.

c) Ausfluss durch das einfache Klappenrohr unter Wasser.

Bei diesen Versuchen war wieder

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 155{,}21.$$

Ferner war der anfängliche Niveauabstand zwischen dem Ober- und Unterwasser

$h_1 = 0{,}6590$ Meter, und der am Ende der Zeit

$h_2 = 0{,}5140$, daher die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0{,}81179 + 0{,}71694}{2}\right)^2 = 0{,}583 \text{ Meter, und}$$

der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{155{,}21 .\ 0{,}09485}{\tau} = \frac{14{,}722}{\tau}.$$

Bei $\varphi = 45°$ Klappenstellung wurde $\tau = 67$ Secunden beobachtet, deshalb ist hierbei

$$\mu_1 = \frac{14{,}722}{67} = 0{,}2197 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1{}^2} = 20{,}713.$$

Nimmt man nun nach (a) für $\varphi = 0$, $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}639$ an, so folgt der Widerstandscoefficient für $\varphi = 45°$:

$\zeta = 20{,}713 - 1{,}639 = 19{,}074$, während wir oben

$\zeta = 17{,}559$ und $18{,}30$ gefunden haben.

Bessere Übereinstimmung gewähren die Resultate bei höheren Stellungen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist.

Tabelle XXV.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch kreisförmige Drehklappen im cylindrischen Rohre und den Ausfluss unter Wasser.

Drehwinkel φ in Graden.	Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Werthe $\frac{1}{\mu_1{}^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1{}^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
45	0,293	67	0,2197	20,71	19,07
47½	0,263	75	0,1963	25,95	24,31
50	0,234	86½	0,1706	34,52	32,88
52½	0,207	99½	0,1480	45,68	44,04
55	0,181	114½	0,1286	60,49	58,85
57½	0,157	135	0,1090	84,09	82,45
60	0,134	161	0,0914	119,60	117,96
62½	0,113	191½	0,0769	169,21	167,57
65	0,094	236½	0,0623	258,07	256,43
67½	0,076	305	0,0483	429,22	427,58
70	0,060	404	0,0364	753,09	751,45
72½	0,046	547½	0,0269	1383,1	1381,5
75	0,035	779	0,0189	2800,0	2798,4

D. Versuche über den Ausfluss durch Ventile.

1) Ausfluss durch ein Kegelventil.

Die Vorrichtung zu den Versuchen über den Ansfluss durch Kegelventile ist durch Fig. 17 Taf. II. in einem Längen- und einem Querdurchschnitte abgebildet. Das Messingrohr *AB*, worin das Ventil befindlich, war $27\frac{1}{2}$ Centimeter lang und 4 Centimeter weit; der darin festgeschraubte Ventilring bildete eine Apertur von 2,386 Durchmesser, also von $\pi\,(1{,}193)^2 = 4{,}471$ Quadratcentimeter Inhalt. Der Hals dieses Ventiles wurde durch zwei Kegel- und durch eine schmale Cylinderfläche gebildet. Die nach dem Einfluss zugerichtete Kegelfläche hatte einen Convergenzwinkel von 65 Grad, die nach dem Ausfluss gehende aber einen solchen von 90 Grad. Das ebenfalls mit $2.\ 45 = 90^{\circ}$ Convergenz abgedrehte Ventil war 0,9 Centimeter dick und hatte einen äussern Durchmesser von 3,084 Centimeter, weshalb ihm ein Querschnitt von $\pi\,(1{,}542)^2 = 7{,}470$ Quadratcentimeter entspricht. Da nun in der Nähe des Ventiles der Durchmesser des Rohres genau 4 Centimeter, also der Querschnitt desselben $= 4\pi = 12{,}566$ Quadratcentimeter Inhalt hatte, so blieb der ringförmige Raum zwischen dem Rohre und dem geöffneten Ventile

$$= 12{,}566 - 7{,}470 = 5{,}096 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Hiernach war also der relative Querschnitt der Apertur im Ventilringe

$\frac{a_1}{a} = \frac{4{,}471}{12{,}566} = 0{,}356$, und der relative Querschnitt der Apertur um das geöffnete Ventil herum

$\frac{a_1}{a} = \frac{5{,}096}{12{,}566} = 0{,}406$, also etwas grösser als jener. Der mittlere relative Inhalt beider Aperturen ist daher

$$\frac{a_1}{a} = 0{,}381.$$

Die 18,5 Centimeter lange und 0,38 Centimeter dicke Ventilstange *EF* ruhte in den galgenförmigen Gestellen *G* und *H* aus 0,33 Centimeter dickem Messingdraht so, dass nur eine Verschiebung in der Axenrichtung möglich war. Dieser lange Ventilstab war nothwendig, um das Ventil von aussen in beliebigen Entfernungen einstellen zu können. Nach jedesmaligem Einstellen wurde eine 0,2 Centimeter dicke Pressschraube *H*, welche seitwärts von aussen nach der einen Gestellaxe hineinging, angezogen, wodurch man die armirte Ventilstange so fest klemmte, dass sie von dem nachher durchfliessenden Wasser nicht aus der einmal gegebenen Stellung fortgeschoben werden konnte.

a) Kegelventil in der Mitte des Rohres.

Bei diesen Versuchen war der Querschnitt der Ausmündung 12,768 Quadratcentimeter, folglich

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 155{,}21.$$

Ferner war die anfängliche Druckhöhe

$h_1 = 0{,}7758$ Meter, die Druckhöhe am Ende der Beobachtung

$h_2 = 0,3938$ Meter, daher die mittlere Druckhöhe

$h = 0,569$ Meter und der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{39,307}{\tau}.$$

Der Ausfluss durch das einfache Rohr gab $\tau = 50\frac{1}{4}$ Secunden, folglich

$$\mu = \frac{39,307}{50,25} = 0,7822 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu^2} = 1,634.$$

Dem einfachen Ventilring ohne Gestelle entsprach $\tau = 109,5$ Secunden, folglich ist für diesen

$$\mu_1 = \frac{39,307}{109,5} = 0,3590 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 7,760,$$ weshalb also für den blossen Durchgang durch die Apertur des Ventilringes, also bei $\frac{a_1}{a} = 0,356$, der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 7,760 - 1,634 = 6,126$$

folgt.

Die Drehklappen gaben für $\frac{a_1}{a} = 0,357$, d. i. für $\varphi = 40^\circ$, $\zeta = 9,495$; 9,254; 9,29; 8,13; 10,541; 10,844; und wenig davon abweichende Coefficienten gaben auch die Schieber. Mit dem Gestelle gab der Ventilring $\tau = 110$ Secunden, weshalb zu schliessen ist, dass das schwache und überall gut abgerundete Ventilgestelle den Widerstand unbedeutend vermehrt.

Das vollständig armirte Ventil, in 2,53 Centimeter Abstand vom Ventilring, gab die Ausflusszeit $\tau = 137\frac{1}{2}$ Secunden, weshalb dieser Stellung der Ausflusscoefficient

$$\mu_1 = \frac{39,307}{137,5} = 0,2859, \text{ ferner}$$

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 12,237$$

und der Widerstandscoefficient

$$\frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 12,237 - 1,634 = 10,603$$

zukommt.

Bei dieser Stellung war das Ventil reichlich um den Durchmesser der Apertur im Ventilringe aus diesem zurückgezogen. Es wurde nun das Ventil diesem immer näher uud näher gerückt und die entsprechende Ausflusszeit beobachtet. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen enthält folgende Tabelle (XXVI). Man ersieht aus ihr, dass man das Ventil noch recht gut 0,3 des ersten Abstandes dem Ringe näher rücken, also in den Abstand 1,77 Centimeter $= \frac{3}{4}$ des Durchmessers der Apertur bringen kann, ohne eine bedeutende Vergrösserung des Widerstandes befürchten zu müssen.

Tabelle XXVI.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch Kegelventile in der Mitte einer cylindrischen Röhre.

Abstand des Ventiles vom Ventilring (Ventilschub.)		Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Absolut, in Centimetern.	Relativ.				
2,53	1,0	137½	0,2859	12,24	10,61
2,28	0,9	137½	0,2859	12,24	10,61
2,02	0,8	138	0,2848	12,34	10,71
1,77	0,7	138½	0,2838	12,42	10,79
1,52	0,6	140	0,2808	12,69	11,06
1,26	0,5	142	0,2768	13,05	11,42
1,01	0,4	147	0,2674	13,99	12,36
0,76	0,3	150	0,2620	14,56	12,93
0,63	0,25	175	0,2246	19,82	18,19
0,51	0,20	212	0,1854	29,09	27,46
0,38	0,15	296	0,1328	56,71	55,08
0,25	0,10	485½ *)	0,0810	152,56	150,93

*) Der Strahl war hohl und geformt wie Fig. 18 Taf. II.

Vorstehende Resultate zeigen, dass man, so lange der Ventilschub nicht kleiner als der Halbmesser der Apertur ist, die Widerstandshöhe für den Durchgang des Wassers durch ein Kegelventil, dessen Apertur 0,356 von dem Querschnitte der Röhre ist, der eilffachen Geschwindigkeitshöhe gleichsetzen könne. Auch weisen dieselben nach, dass der Widerstand bedeutend wächst, wenn man das Ventil weniger als um den Halbmesser der Apertur ausschieben lässt.

b) Kegelventil am Anfang des Rohres.

In der Praxis kommen noch Fälle vor, wo das Ventil an der Übergangsstelle aus einem weiten Gefässe in eine engere Röhre, oder aus dieser in ein weiteres Gefäss sich befindet. Deshalb wurde auch das Ventil noch ein Mal am Anfang, beim Eintritt aus dem Ausflussreservoir, und ein anderes Mal an das Ende des Rohres geschoben und in beiden Fällen die vorige Versuchsreihe wiederholt. In dem ersten Falle wurde der Ventilring so eingesetzt, dass die vordere Stirnfläche desselben in die Ebene der Gefässwand zu liegen kam. Die Ergebnisse der Beobachtung waren nur wenig abweichend von den vorigen.

Bei möglichst aufgezogenem Ventile (2,53 Centimeter Schubweite) war τ = der 135⅕ Secunden, folglich war hier

$$\mu_1 = \frac{39,307}{135,2} = 0,2907 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1^2} = 11,83,$$

weshalb sich der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 11,83 - 1,63 = 10,20$$

setzen lässt.

Folgendes wurde durch die Beobachtungen bei verschiedenen Einstellungen des Ventiles gewonnen.

Tabelle XXVII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch Kegelventile am Anfang einer cylindrischen Ausflussröhre.

Ventilschub. Absoluter, in Centimetern.	Ventilschub. Relativer.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$
2,53	1,00	135,2	0,2907	11,83	10,20
1,26	0,50	137,4	0,2861	12,22	10,59
0,76	0,30	141,0	0,2788	12,87	11,24
0,63	0,25	168,25	0,2336	18,32	16,69
0,51	0,20	205,5	0,1913	27,33	25,70
0,38	0,15	286	0,1374	52,94	51,31

c) Kegelventil am Ende des Ausflussrohres.

Bei den Versuchen über den Ausfluss des Wassers durch das Kegelventil am Ende des Rohres wurde der Wasserkasten angeschoben, damit der Ausfluss unter Wasser statt finden konnte. Bei diesen Versuchen war

$h_1 = 0{,}5825$ Meter,

$h_2 = 0{,}2021$ Meter, folglich

$h = 0{,}367$ Meter und

$\mu = \frac{155{,}21 \cdot 0{,}31489}{\tau} = \frac{48{,}874}{\tau}$, insofern man nicht die Apertur im Ventilringe, sondern den Röhrenschnitt als Ausflussöffnung ansieht.

Bei völlig aufgezogenem Ventile war $\tau = 170\frac{1}{4}$ Secunden, daher

$\mu = \frac{48{,}874}{170{,}25} = 0{,}2871$, und $\frac{1}{\mu^2} = 12{,}13$, daher der Ausflusscoefficient, bezogen auf den Querschnitt der Apertur im Ventilringe:

$$\alpha = \frac{a}{a_1}\,\mu = \frac{0{,}2871}{0{,}356} = 0{,}806.$$

Für die blosse Röhre ist der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}634$, folglich ergibt sich, nach Abzug des Röhrenwiderstandes, der Ausflusscoefficient für das blosse Ventil durch die Formel

$$\alpha = \frac{a}{a_1}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu^2} - \zeta}} = \frac{1}{0{,}356\,\sqrt{12{,}134 - 0{,}634}} = \frac{1}{0{,}356\,\sqrt{11{,}5}}$$
$$= 0{,}828.$$

Von einem Widerstandscoefficienten kann hier eigentlich nicht die Rede sein, da das durch die Ventilmündung fliessende Wasser unmittelbar in das ziemlich in Ruhe befindliche Unterwasser floss. Nach der seither gefolgten Bestimmungsweise würde derselbe

$$= \frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 12{,}13 - 1{,}63 = 10{,}5$$

sein.

Wurde das Ventil dem Ventilringe um die Hälfte genähert, blieb also der Abstand noch 1,26 Centimeter, so wurde $\tau = 183\frac{1}{4}$ Secunden beobachtet, weshalb sich dann $\mu = 0{,}2667$, $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 14{,}06$, also der imaginäre Widerstandscoefficient $= 14{,}06 - 1{,}63 = 12{,}43$, so wie der reine Ausflusscoefficient

$$\alpha_1 = \frac{a}{a_1}\sqrt{\frac{1}{1 + 12{,}43}} = \frac{1}{0{,}356\,\sqrt{13{,}43}} = 0{,}767$$

herausstellt.

War endlich der Abstand nur noch ein Viertel des ganzen Ventilschubes, also $= 0{,}63$ Centimeter, so fand man $\tau = 224$ Secunden, daher ist hiernach $\mu_1 = 0{,}2180$, $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 21{,}04$, folglich der entsprechende Widerstandscoefficient $= 21{,}04 - 1{,}63 = 19{,}41$ und der reine Ausflusscoefficient

$$\alpha_1 = \frac{1}{0{,}356\,\sqrt{20{,}41}} = 0{,}622.$$

Der freie Ausfluss in die Luft gab für den vollständigen Ventilschub $\tau = 133\frac{1}{2}$ Secunden und für den halben Schub $\tau = 147$ Secunden. Für die erste Stellung folgt daraus

$$\mu_1 = 0{,}2950,\ \frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 9{,}93 \text{ und } \alpha_1 = 0{,}850,$$

für die zweite aber

$$\mu_1 = 0{,}2674,\ \frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 12{,}35 \text{ und } \alpha = 0{,}769.$$

Beide Ergebnisse stimmen mit den obigen Resultaten beim Ausfluss unter Wasser gut überein.

---

2) Ausfluss durch Klappventile.

a) Rundes Klappventil im cylindrischen Rohre.

Der Apparat zu den Versuchen über den Ausfluss durch eine runde Klappe im cylindrischen Rohre ist in Fig. 19 Taf. II. abgebildet. *AB* ist das gewöhnliche $27\frac{1}{2}$ Centimeter lange und 4 Centimeter weite Messingrohr, *CD* ist der in der Mitte desselben eingesetzte Klappenring, *K* die Klappe selbst, *EF* ihre Axe mit dem Conus zum Aufsetzen des eingetheilten Kreises und mit der Pressschraube *G* zum festen Einstellen. Der innere Durchmesser der Apertur im Ventilringe war 2,925 Centimeter, folglich der relative Inhalt der Apertur, den Inhalt der 4 Centimeter weiten Röhre = Eins gesetzt,

$$\frac{a_1}{a} = \left(\frac{2{,}925}{4}\right)^2 = (0{,}73125)^2 = 0{,}5347.$$

Um die Contraction herabzuziehen, war diese Apertur nach dem Einflusse zu etwas conisch erweitert. Es betrug die Länge des cylindrischen Theiles der Apertur 0,45 Centimeter, und die

des conischen = 0,55 Centimeter, endlich der grössere Durchmesser der Apertur = 3,400. Hiernach ergibt sich für den Convergenzwinkel φ der Werth

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{3{,}400 - 2{,}925}{2.\ 0{,}55} = \frac{4{,}75}{11} = 0{,}4318, \text{ folglich}$$

$$\frac{\varphi}{2} = 23\tfrac{1}{3}^{\circ} \text{ und } \varphi = 46\tfrac{2}{3}^{\circ}.$$

Die kreisrunde Klappe hatte 3,55 Centimeter im Durchmesser, lag also, selbst wenn sie auf der äusseren und ebenen Stirnfläche auflag und abschloss, nicht an der Röhrenwand an, sie hatte vielmehr nur einen Querschnitt von $\left(\frac{3{,}55}{2}\right)^2 . \pi = 9{,}898$ Quadratcentimeter, und liess also an ihrem Umfang eine Ringfläche von $12{,}566 - 9{,}898 = 2{,}668$ Quadratcentimeter $= 0{,}2124.\ a$ übrig. Dieses Verhältniss und die übrigen Einrichtungen gestatteten dem Ventil eine Drehung von 73½ Grad, und es wurde nun der eingetheilte Kreis so auf den Kopf der Ventilaxe festgeschraubt, dass er, möglichst geöffnet (also 73½ Grad aufgedreht), Null, und schliessend 73½ Grad anzeigte. Uebrigens fand bei dieser Stellung vollständiger Abschluss statt.

α) Ausfluss durch das einfache Klappenrohr.

Bei diesen Versuchen war wieder

$$a = 12{,}768, \text{ daher}$$

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 155{,}21.$$

Ferner ergab sich $h_1 = 0{,}7980 - 0{,}0200 = 0{,}7780$, und

$$h_2 = 0{,}7780 - 0{,}3820 = 0{,}3960 \text{ Meter:}$$

weshalb folgt

$$h = 0{,}571 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{155{,}21.\ 0{,}25275}{\tau} = \frac{39{,}229}{\tau}.$$

Der Ausfluss durch das blosse Rohr ohne Klappe und Ring gab $\mu = 0{,}7822$ und $\zeta = 0{,}634$. Bei eingesetztem Klappenringe, also bei dem Durchgang durch die Apertur im Ringe, war $\tau = 64$ Sec., weshalb sich für diesen Fall ergibt:

$$\mu_1 = \frac{39{,}229}{64} = 0{,}6130 \text{ und}$$

$$\frac{1}{\mu_1{}^2} = 2{,}6616 - 1 = 1{,}662.$$

Der Widerstandscoefficient für den blossen Durchgang durch die Apertur ist hiernach

$$\frac{1}{\mu_1{}^2} - \frac{1}{\mu^2} = 1{,}662 - 0{,}634 = 1{,}028.$$

Einen bedeutenden Einfluss hatte schon die auf Null gestellte (73½ Grad geöffnete) Klappe, denn bei dieser war $\tau = 70{,}4$ Secunde; und sonach

$$\mu_1 = \frac{39{,}229}{70{,}4} = 0{,}5572,\ \frac{1}{\mu_1{}^2} = 3{,}221 \text{ und}$$

$$\zeta_1 = 3{,}221 - 1{,}634 = 1{,}587.$$

Folgendes ist durch die Beobachtungen beim Ausflusse durch die übrigen Klappenstellungen gewonnen worden.

Tabelle XXVIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch Klappenventile und den Ausfluss durch das einfache kurze Rohr.

Stellwinkel φ in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_{τ}.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Einfaches Rohr	—	0,7822 = μ	1,634	0,000
Mit Ring	64	0,6130	2,662	1,028
Mit Ring u. Klappe auf				
0°	70,4	0,5572	3,221	1,587
2½	71⅓	0,5487	3,322	1,688
5	73½	0,5337	3,510	1,876
7½	77	0,5095	3,853	2,219
10	80¾	0,4858	4,237	2,603
12½	85	0,4615	4,695	3,061
15	89½	0,4383	5,205	3,571
17½	95	0,4129	5,864	4,230
20	102	0,3846	6,761	5,127
22½	109½	0,3583	7,791	6,157
25	118	0,3325	9,048	7,414
27½	126½	0,3101	10,398	8,764
30	137¼	0,2858	12,24	10,61
32½	148	0,2651	14,23	12,60
35	161½	0,2429	16,95	15,32
37½	175	0,2242	19,90	18,27
40	191½	0,2049	23,83	22,20
42½	209	0,1877	28,38	26,75
45	225	0,1744	32,90	31,27
47½	246	0,1595	39,32	37,69
50	269½	0,1456	47,19	45,56
52½	294½	0,1332	56,36	54,73
55*)	323	0,1214	67,79	66,16
57½**)	368½	0,1065	88,24	86,61
60***)	411	0,0954	109,76	108,13

*) Ganz unruhig und schäumend ausfliessend, doch voll.

**) Erst stossweise und schäumend ausfliessend, nach 90 Secunden aber plötzlich hohl wie eine Blase (Fig. 20 Taf. II.).

***) Hohler Strahl.

Sehr gut in Übereinstimmung hiermit sind folgende Versuche.

β) Ausfluss durch die lange Eisenröhre.

Bei an das Ende des Klappenrohres angeschobener Eisenröhre stellten sich folgende Ergebnisse heraus.

Die Wasserstände waren die vorigen, dagegen war

$a = 12{,}832$ Quadratcentimeter und folglich

$$\mu = \frac{1981{,}7 \;.\; 0{,}25275}{12{,}832 \;.\; \tau} = \frac{39{,}034}{\tau}.$$

Für die blosse Röhrenverbindung wurde $t = 55\frac{1}{4}$ Secunden beobachtet, weshalb sich

$$\mu = 0{,}7068 \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = 2{,}002$$

herausstellt.

Bei völlig geöffneter Ventilklappe ($73\frac{1}{2}$ Grad) war $t = 73\frac{3}{4}$ Grad, folglich

$$\mu_1 = \frac{39{,}034}{73{,}75} = 0{,}5293 \text{ und } \frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 3{,}570.$$

Hiernach gibt die (um $73\frac{1}{2}$ Grad) geöffnete Klappe den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2} = 3{,}570 - 2{,}002 = 1{,}568,$$ während oben 1,587 gefunden wurde.

Übrigens sind folgende Resultate erlangt worden.

Tabelle XXIX.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch Klappenventile und den Ausfluss durch das verlängerte Rohr.

Stellwinkel φ in Graden.	Ausflusszeit t in Secunden.	Ausfluss-coefficient μ_1.	Werth $\frac{1}{\mu_1^{\,2}}$.	Widerstands-coefficient $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} - \frac{1}{\mu^2}$
Einf. Rohrverbindung	$55\frac{1}{4}$	0,7068 = μ	2,002	0,000
0	$73\frac{3}{4}$	0,5293	3,570	1,568
$2\frac{1}{2}$	$74\frac{3}{4}$	0,5222	3,667	1,665
5	76	0,5136	3,791	1,789
$7\frac{1}{2}$	$79\frac{1}{2}$	0,4910	4,148	2,146
10	$82\frac{3}{4}$	0,4717	4,494	2,492
$12\frac{1}{2}$	$86\frac{3}{4}$	0,4500	4,939	2,937
15	$91\frac{1}{2}$	0,4266	5,495	3,493
$17\frac{1}{2}$	97	0,4024	6,175	4,173
20	$103\frac{1}{2}$	0,3771	7,031	5,029
$22\frac{1}{2}$	110	0,3549	7,942	5,940
25	$118\frac{1}{2}$	0,3294	9,216	7,214
$27\frac{1}{2}$	$127\frac{1}{2}$	0,3061	10,669	8,667
30	$137\frac{1}{2}$	0,2839	12,41	10,41
$32\frac{1}{2}$	149	0,2620	14,57	12,57
35	162	0,2410	17,22	15,22
$37\frac{1}{2}$	176	0,2218	20,33	18,33
40	191	0,2044	23,94	21,94
$42\frac{1}{2}$	209	0,1868	28,67	26,67
45	$226\frac{1}{2}$	0,1723	33,67	31,67
$47\frac{1}{2}$	$246\frac{1}{2}$	0,1584	39,88	37,88
50	269	0,1451	47,49	45,49
$52\frac{1}{2}$	$296\frac{1}{2}$	0,1317	57,70	55,70
55	326	0,1197	69,75	67,75
$57\frac{1}{2}$	$354\frac{1}{2}$	0,1101	82,48	80,48
60	395	0,0988	102,4	100,4
$62\frac{1}{2}$	442	0,0883	128,2	126,2
65 *)	522	0,0748	178,8	176,8

*) Der Strahl zog sich allmählig von der oberen Seite der Röhrenwand ab, und nach 430 Secunden hörte, bei vorausgegangenem Gurgeln und Absetzen, der volle Ausfluss ganz auf.

γ) Ausfluss durch eine Röhrenverbindung wie Fig. 11 Taf. I.

Bei hydraulischen Ausführungen im Grossen, wie z. B. bei Pumpen, findet man oft die Einrichtung, dass sich die Klappe an einer Stelle befindet, wo sich eine weitere Röhre an eine engere anschliesst, und deshalb das Ventil auf der Stirnfläche der engeren aufruht. Aus diesem Grunde wurde auch die weitere Messingröhre Fig. 19 Taf. II. mit der Klappe und ihrem Ringe über die engere Messingröhre (Fig. 9 Tab. I.) so weggeschoben, dass der Klappenring unmittelbar auf der Stirnfläche dieser kürzeren und engeren Röhre zu liegen kam, und sich der conische Theil der Apertur dieses Ringes unmittelbar an die Wandfläche der engeren Röhre anschloss. Übrigens wurden die Versuche genau so durchgeführt, wie die nächst vorhergehenden.

Es war wieder $\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 155{,}21$,

$h_1 = 0{,}7780$

$h_2 = 0{,}3960$ und

$h = 0{,}571$ Meter, so wie

$\mu = \frac{39{,}229}{\tau}$.

Es liess sich hier das Ventil um 77 Grad drehen, weshalb denn auch der eingetheilte Kreis so auf den Kopf der Ventilspindel geschraubt wurde, dass er beim Abschliessen 77 Grad anzeigte. Für die einfache Röhrenverbindung ohne Verengungen u. s. w. wurde $\tau = 60\frac{3}{4}$ Secunden beobachtet, weshalb sich

$$\mu = \frac{39{,}229}{60{,}75} = 0{,}6458 \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = 2{,}398$$

ergibt.

Mit dem Ventilringe ohne Klappe war

$\tau = 69$ Secunden, folglich

$\mu_1 = 0{,}5685$, $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 3{,}094$, und daher der Widerstandscoefficient für den Ring allein $= 0{,}696$.

Bei dem eben angeführten Versuche waren die Axenlöcher der Klappe verstopft. Bei unverschlossenen Axenlöchern nahm der ausfliessende Wasserstrahl eine grössere Sprungweite an, wurde hohl und saugte Luft durch diese Löcher nach, weshalb jene Zeit von $60\frac{3}{4}$ Sec. in eine Zeit von $70\frac{1}{2}$ Sec. und diese von 69 Sec. in $85\frac{1}{2}$ Sec. überging. Das kurze cylindrische Rohr allein gab $\tau = 70\frac{1}{2}$ Secunden, welches beweist, dass die angeschobene weitere cylindrische Ansatzröhre beim Zutritt der Luft einen unbedeutenden Einfluss auf das ausfliessende Wasser ausübt.

Folgende Tabelle enthält die durch diese Versuche gewonnenen Resultate.

Tabelle XXX.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein rundes Klappventil und den Ausfluss durch ein zusammengesetztes Rohr (erst enger dann weiter).

Stellwinkel φ in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Blosse Rohrverbindung	$60\frac{3}{4}$	0,6458	2,398	0,000
Ohne Klappe	69	0,5685	3,094	0,696
Klappe auf 0	$74\frac{1}{4}$	0,5283	3,582	1,184
$2\frac{1}{2}$	$74\frac{1}{2}$	0,5266	3,606	1,208
5	$75\frac{1}{4}$	0,5213	3,680	1,282
$7\frac{1}{2}$	$77\frac{1}{4}$	0,5078	3,878	1,480
10	$80\frac{1}{2}$	0,4873	4,211	1,813
$12\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	0,4698	4,530	2,132
15	$87\frac{1}{2}$	0,4483	4,975	2,577
$17\frac{1}{2}$	$91\frac{1}{2}$	0,4287	5,440	3,042
20	$98\frac{1}{2}$	0,3983	6,304	3,906
$22\frac{1}{2}$	104	0,3772	7,028	4,630
25	110	0,3566	7,863	5,465
$27\frac{1}{2}$	$118\frac{1}{2}$	0,3311	9,125	6,727
30	128	0,3065	10,646	8,248
$32\frac{1}{2}$	136	0,2885	12,019	9,621
35	148	0,2651	14,23	11,83
$37\frac{1}{2}$	160	0,2446	16,71	14,31
40	175	0,2242	19,90	17,50
$42\frac{1}{2}$	190	0,2065	23,46	21,06
45	205	0,1914	27,31	24,91
$47\frac{1}{2}$	222	0,1767	32,02	29,62
50	245	0,1601	39,00	36,60
$52\frac{1}{2}$	$267\frac{1}{2}$	0,1467	46,50	44,10
55	291	0,1348	55,03	52,60
$57\frac{1}{2}$	323	0,1215	67,79	65,39
60*)	353	0,1111	80,97	78,57
$62\frac{1}{2}$**)	$390\frac{1}{2}$	0,1005	99,09	96,69
65***)	$445\frac{1}{2}$	0,0881	128,96	126,56

*) stossweise, gurgelnd und wallend ausfliessend;

**) anfangs desgl., aber nach 115 Secunden hörte der volle Ausfluss auf und der Strahl wurde hohl wie eine Blase;

***) der volle Ausfluss hörte nach 10 Secunden auf.

Wenn man berücksichtigt, dass bei der letzten Versuchsreihe die Klappe um 77°, bei den beiden vorletzten aber nur um $73\frac{1}{2}$ Grad gedreht werden konnte, so stellt sich eine leidliche Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen dieser heraus. Z. B. bei $\varphi = 40°$, also bei Öffnung der Klappe um $73\frac{1}{2}° - 40° = 33\frac{1}{2}°$ geben die beiden ersten Versuchsreihen $\zeta = 22{,}20$ und 21,94. Bei $\varphi = 42\frac{1}{2}°$ und $\varphi = 45°$, also bei Öffnung der Klappe um $77° - 42\frac{1}{2}° = 34\frac{1}{2}°$ und $77° - 45° = 32°$ gibt die letzte Tabelle $\zeta = 21{,}06$ und 24,91 und also für die Eröffnung von $33\frac{1}{2}$ Grad durch Interpolation $= 21{,}06 + \frac{2}{5}(24{,}91 - 21{,}06) = 21{,}06 + 1{,}54 = 22{,}60$.

b) Rectanguläres Klappventil in einer Verbindung von zwei parallelepipedischen Röhren.

Noch wurde in das längere, 5 Centimeter weite und 2½ Centimeter hohe Messingrohr eine 2 Millimeter dicke rectanguläre Klappe eingesetzt, welche sich um 77½ Grad drehen liess. Dieses Rohr selbst wurde über das an das Ausflussreservoir angesetzte kurze und engere Messingrohr Fig. 10 Taf. I. so geschoben, dass die Klappe, wenn sie abschliessen sollte, auf die Stirnfläche des letzteren zu liegen kam. Es floss also hier das Wasser aus einer engeren Röhre in eine weitere, und hatte nur eine durch die mehr oder weniger geöffnete Klappe gebildete Verengung zu passiren, weil ein Klappenring mit einer verengten Apertur gar nicht eingesetzt war. Der Querschnitt des engeren Röhrenstückes war

$$a_1 = 4{,}217 \,.\, 1{,}910 = 8{,}0544 \text{ Quadratcentimeter,}$$

der Querschnitt des weiteren, namentlich der Ausmündung desselben:

$$a = 5{,}018 \,.\, 2{,}478 = 12{,}435 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Übrigens war hier

$$h_1 = 0{,}7765 \text{ Meter, und}$$

$$h_2 = 0{,}3945 \text{ Meter, folglich}$$

$$h = 0{,}570 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{1981{,}7 \,.\, 0{,}25310}{12{,}435 \,.\, \tau} = \frac{40{,}335}{\tau}.$$

α) Ausfluss durch das Messingrohr.

Die einfache Röhrenverbindung, ohne Klappe, mit verstopften Axenlöchern gab $\tau = 64{,}5$ Secunden, folglich ist für diese

$$\mu = \frac{40{,}335}{64{,}5} = 0{,}6254 \text{ und } \frac{1}{\mu_2} = 2{,}557.$$

Waren die Löcher zur Axe der Klappe geöffnet, so wurde Luft durch diese angesaugt und es dauerte die Ausflusszeit 76 Secunden, d. i. gerade so lang, als wenn das längere Rohr gar nicht da gewesen wäre und der Ausfluss nur durch das kürzere Rohr statt gefunden hätte.

Bei eingesetzter Klappe, und dieselbe vollständig geöffnet (also 77½ Grad), ergab sich $\tau = 70$ Secunden, weshalb sich für diesen Fall

$$\mu_1 = 0{,}5762,\ \frac{1}{\mu_1{}^2} = 3{,}012 \text{ und der Widerstandscoefficient}$$

$$\zeta = 3{,}012 - 2{,}557 = 0{,}455$$

herausstellt.

Übrigens wurden folgende Resultate gewonnen.

Tabelle XXXI.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein rectanguläres Klappventil im zusammengesetzten parallelepipedischen Rohre.

Drebwinkel φ in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausfluss-coefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstands-coefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	$64\frac{1}{2}$	0,6254	2,557	0,000
0	70	0,5762	3,012	0,455
$2\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{2}$	0,5641	3,142	0,585
5	75	0,5378	3,457	0,900
$7\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$	0,5011	3,983	1,426
10	$86\frac{1}{4}$	0,4677	4,572	2,015
$12\frac{1}{2}$	$98\frac{1}{2}$ *)	0,4095	5,963	3,406
15	$111\frac{1}{2}$ **)	0,3618	7,641	5,084
20	131 ***)	0,3097	10,545	7,978

*) Nach 50 Secunden hörte der volle Ausfluss auf.

**) Ebenso nach 5 Secunden.

***) Hohler Strahl.

Um bei grösseren Verengungen noch vollen Ausfluss zu erhalten, wurden folgende Versuche angestellt.

β) Ausfluss durch die angeschobenen Eisenröhre.

Hier waren h_1, h_2 und h wie oben, dagegen $a = 12,49$ Quadratcentimeter, weshalb folgt

$$\mu = \frac{1981,7 \ . \ 0,25310}{12,490 \ . \ \tau} = \frac{40,158}{\tau}.$$

Ohne Klappe und bei verschlossenen Axenlöchern war $\tau = 69,75$ Sec., daher

$$\mu = \frac{40,158}{69,75} = 0,5757 \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = 3,017.$$

Mit offenen Axenlöchern ergab sich wie beim kurzen Ansatzrohre $\tau = 76$ Secunden.

Bei möglichst (um $77\frac{1}{2}$ Grad) geöffneter Klappe war $\tau = 72\frac{3}{4}$ Secunden, daher

$$\mu_1 = 0,5520, \ \frac{1}{\mu_1^2} = 3,282 \text{ und der entsprechende Widerstandscoefficient.}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2} = 3,282 - 3,017 = 0,265.$$

Folgende Tabelle enthält die Resultate der ganzen Versuchsreihe.

Tabelle XXXII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein rectanguläres Klappventil im verlängerten zusammengesetzten Rohr.

Drehwinkel φ der Klappe in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	69¾	0,5757	3,017	0,000
0	72¾	0,5520	3,282	0,265
2½	74½	0,5390	3,442	0,425
5	76¾	0,5232	3,653	0,636
7½	80	0,5020	3,969	0,952
10	84	0,4781	4,375	1,358
12½	89	0,4512	4,912	1,895
15	95	0,4227	5,597	2,580
17½	103	0,3899	6,579	3,562
20	113	0,3554	7,918	4,901
22½	124½	0,3226	9,612	6,595
25	136	0,2953	11,469	8,452
27½	150½	0,2668	14,05	11,03
30	167	0,2405	17,29	14,27
32½	189	0,2125	22,15	19,13
35	218	0,1842	29,47	26,45
37½	246	0,1632	37,53	34,51
40	285	0,1409	50,37	47,35
42½	322	0,1247	64,29	61,27
45	363	0,1106	81,71	78,69
47½	406	0,0989	102,21	99,19
50	465	0,0864	134,08	131,06

Bei 52½°, 55° Stellung u. s. w. konnte der volle Ausfluss nicht mehr erzwungen werden.

Es ist auffallend, dass die letztere Tabelle viel kleinere Widerstandscoefficienten gibt als die nächst vorhergehende (XXXI), und nur dadurch zu erklären, dass dort ein sehr unregelmässiger und schwankender Ausfluss statt hatte, während derselbe hier noch sehr gleichmässig erfolgte. Während dort der volle Ausfluss schon bei 12½ Grad, also bei 77½° — 12½° = 65 Grad Eröffnung schon aufhörte, begann er hier erst bei φ = 52½ Grad, d. i. bei 77½° — 52½° = 25 Grad Klappenöffnung.

c) Rectanguläres Klappventil in der Mitte des parallelepipedischen Messingrohres.

Um zu ermitteln, ob die Ausflussgeschwindigkeit eine grössere oder eine kleinere wird, je nachdem eine einseitige Klappe nach innen oder nach aussen gedreht wird, wurden folgende, übrigens nicht auf die grösste Genauigkeit Anspruch machende Versuche angestellt. Diese Klappe befand sich in der Mitte des 32 Centimeter langen, 5 Centimeter weiten und 2½ Centimeter hohen Messingrohres; sie war 3 Millimeter dick und stand mit ihrer 6 Millimeter dicken Scharnieraxe zur Hälfte in der schwalen Seitenwand des Rohres, so dass sie sich noch 72½ Grad drehen liess. Die

Versuche wurden mit der kleinen Ausflussmenge angestellt, und um den vollen Ausfluss nicht zu verlieren, wurde die eiserne Röhre angesteckt.

Es war hierbei

$h_1 = 0{,}7800$ Meter,

$h_2 = 0{,}6344$ Meter, folglich

$h = 0{,}705$ Meter.

Da $a = 12{,}49$ Quadratcentimeter enthielt, so musste

$$\mu = \frac{1981{,}7 \; . \; 0{,}08669}{12{,}49 \; \tau} = \frac{13{,}754}{\tau}$$

gesetzt werden.

Ohne Klappe war $\tau = 19$ Secunden, folglich für diesen Fall

$$\mu = \frac{13{,}754}{19} = 0{,}724 \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = 1{,}91.$$

Die Klappe, um 50 Grad nach aussen (nach der Ausflussmündung zu) gedreht, ergab sich $\tau = 45\frac{1}{2}$ Sec., folglich

$$\mu_1 = \frac{13{,}754}{45{,}5} = 0{,}302, \; \frac{1}{\mu_1{}^2} = 10{,}94 \text{ und}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1{}^2} - \frac{1}{\mu_2} = 9{,}03.$$

Eben so viel nach innen (nach der Einmündung zu) geöffnet, ergab sich $\tau = 47$ Secunden, folglich

$$\mu_1 = \frac{13{,}754}{47} = 0{,}293, \; \frac{1}{\mu_1{}^2} = 11{,}68 \text{ und}$$

$$\zeta = 11{,}68 - 1{,}91 = 9{,}77.$$

Es sind also die Widerstandscoefficienten für diese beiden Stellungen nicht sehr von einander verschieden. Etwas grösser wird jedoch der Unterschied bei andern Stellwinkeln, wie aus folgender Tabelle, welche die Resultate der ganzen Versuchsreihe enthält, zu ersehen ist. Es lässt sich erwarten, dass diese Ergebnisse mit denen bei Drehklappen, Drosselventile am nächsten kommen müssen. In der That, die rectanguläre Drehklappe gibt bei $\varphi = 40^\circ$ (s. Tabelle No. XXI.), oder bei Eröffnung von $90 - \varphi = 50^\circ$, $\zeta = 9{,}25$, also einen Werth, welcher zwischen den eben angeführten mitten inne steht. Ebenso wird man finden, dass bei anderen Stellungen die Widerstandscoefficienten für die zweiflügelige Drehklappe zwischen den Widerstandscoefficienten des Klappenventiles (der einflügeligen Drehklappe), einmal nach innen, das andere Mal nach aussen gedreht, liegen.

Tabelle XXXIII.

Coefficienten für den Durchgang des Wassers durch ein rectanguläres Klappventil im verlängerten einfachen Rohr.

1) Drehung der Klappe nach aussen.

Grösse der Eröffnung oder 90° — φ in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	19	0,724	1,91	0,00
75	21¼	0,647	2,39	0,48
70	23	0,598	2,80	0,89
65	26	0,529	3,57	1,66
60	30½	0,451	4,92	3,01
55	36¼	0,379	6,95	5,04
50	45½	0,302	10,94	9,03
45	57	0,241	17,17	15,26
40	76¼	0,180	30,73	28,82
35	105	0,131	58,27	56,36
30	147	0,094	114,22	112,31
25	215	0,064	244,33	242,42

2) Drehung der Klappe nach innen.

Grösse der Eröffnung oder 90° — φ in Graden.	Ausflusszeit τ in Secunden.	Ausflusscoefficient μ_1.	Ausdruck $\frac{1}{\mu_1^2}$.	Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu^2}$.
Ohne Klappe	19	0,724	1,91	0,00
70	26	0,529	3,57	1,66
65	29½	0,466	4,60	2,69
60	34¾	0,396	6,38	4,47
55	41	0,336	8,89	6,98
50	47	0,293	11,68	9,77
45	57½	0,239	17,48	15,57
40	69¾	0,197	25,72	23,81
35	89	0,155	41,87	39,96
30	115	0,120	69,90	67,99
25	160	0,086	135,31	133,40
20	216	0,064	246,60	244,69

Graphische Darstellung der Hauptresultate.

Um die Abhängigkeit der Widerstände von den sie erzeugenden Verengungen in Schiebern, Hähnen u. s. w. anschaulich zu machen, und sich eine bequeme Übersicht der Hauptergebnisse von den angestellten Versuchen über den Ausfluss durch Schieber, Hähne u. s. w. zu verschaffen, hat man die Inhalte der verengten Querschnitte und die entsprechenden Widerstandscoefficienten auf Taf. III. als zusammengehörige Coordinaten aufgetragen und die sich dadurch ergebenden Punkte durch Curven verbunden. Hierbei wurden die relativen Querschnitte, den Röhrenquerschnitt = Eins angenommen, durch die horizontalen Abscissen, und die entsprechenden Widerstandscoefficienten durch die vertikalen Ordinaten repräsentirt, wie auch aus der Figurentafel leicht zu ersehen ist.

Da diese Coefficienten bei kleinen Durchgangsöffnungen sehr gross ausfallen, so war es nicht möglich, dieselben durchaus auf einerlei Einheit zu beziehen; man hat es vielmehr nöthig gefunden, für Durchgänge von dem Querschnitt $= \frac{1}{2}$ und darunter die Einheit zehn Mal so klein als für grössere Durchgänge anzunehmen und in dieser Verjüngung auf das Papier zu bringen, weshalb sich auch auf der Tafel zwei abgesonderte Curvensysteme vorfinden.

Die beiden Curven in Strichen entsprechen den in Tab. II. und Tab. IV. aufgeführten Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber. Die beiden Curven in Punkten geben die Scalen der Widerstände für den Durchgang des Wassers durch geradgebohrte Hähne, nach Tab. VIII. und Tab. XIII., so wie die Curve in Strich-Punkten als Widerstandsscala für die krummgebohrten Hähne nach Tab. XVI. anzusehen ist.

Die beiden Curven in Strichen gehören endlich den Widerständen beim Durchgang durch rectanguläre und kreisförmige Drehklappen an, und sind nach Tabelle XXI. und Tabelle XXIV. construirt.

Ein Blick auf die Tafel III. überzeugt uns, dass diese Widerstandscoefficienten für diese verschiedenen Regulatoren bei gleichem Querschnitt der Verengung sehr verschieden ausfallen. Ist z. B. dieser Querschnitt $= \frac{1}{2}$, so sieht man, dass die vierseitige Drehklappe den kleinsten Widerstand gibt, dass der krummgebohrte Hahn einen etwas grösseren, die beiden Schieber aber noch grössere und die geradgebohrten Hähne die grössten Widerstände geben. Übrigens tritt deutlich hervor, dass alle diese Widerstandsscalen in der Hauptform übereinstimmen und nur durch die Dimensionen, also in den Parametern, von einander abweichen.

Die Vertikallinie in Strichen entspricht der Widerstandsscala für das Kegelventil nach Tab. XXVI. und die Vertikale in Punkten gehört der Widerstandsscala für das runde Klappenventil nach Tab. XXIX. an. Diese Linien treten als Vertikalen auf, weil man nur den Inhalt der Apertur im Ventilringe als Querschnitt der Durchgangsöffnung angesehen hat. Die untersten Endpunkte dieser Vertikalen entsprechen hiernach der grössten Eröffnung des Ventiles, wogegen höher hinauf liegende Punkte Widerständen bei mehr geschlossenen Ventilen angehören.

Endlich soll die dick ausgezogene Curve eine nach der seither bekannten Theorie construirte Widerstandsscala vorstellen. Ist α der Contractionscoefficient beim Durchgang des Wassers durch eine Verengung vom relativen Querschnitte $\frac{a_1}{a}$, so hat man der Theorie zu Folge den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$$

zu setzen.

Die folgenden Nebenversuche geben aber

$$\alpha = \frac{0{,}6065 + 0{,}6165}{2} = 0{,}6115, \text{ demnach erhalten wir}$$

$$\zeta = \left(\frac{a}{0{,}6115\, a_1} - 1\right)^2 = \left(1{,}635\,\frac{a}{a_1} - 1\right)^2.$$

Setzen wir nun für $\frac{a}{a_1}$ nach und nach eine Reihe von Werthen ein, so ergibt sich folgende Scala von Widerstandscoefficienten:

Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$.	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70
Widerstands-coefficient.	0,404 *)	0,520	0,667	0,854	1,090	1,393	1,785

Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$.	0,65	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30
Widerstands-coefficient ζ.	2,298	2,977	3,894	5,132	6,938	9,538	13,487	19,812

Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$.	0,25	0,20	0,175	0,15	0,125	0,100	0,075	0,050
Widerstands-coefficient ζ.	30,707	51,504	69,638	98,052	145,99	235,72	432,64	1004,9

*) Es versteht sich von selbst, dass man hier den Contractionscoefficienten $\alpha = 1$, also eigentlich den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0$ setzen müsse.

Nach obiger Scala ist die dicke Curve auf Taf. III. construirt. Man sieht, dass sich dieselbe zwischen den übrigen Curven hindurchzieht, und dass sie die Hauptform mit diesen gemeinschaftlich hat. Anfangs geht sie über sämmtliche Curven hinweg, später schneidet sie die Widerstandscurve für geradgebohrte Hähne und endlich nähert sie sich den übrigen Curven und schneidet sogar noch die Widerstandscurve für Schieber.

Es folgt daraus, dass nur bei sehr kleinen Durchgangsöffnungen die theoretisch bestimmten Widerstände mit denen bei Schiebern nahe in Übereinstimmung sind, dass dagegen bei grösseren Öffnungen nur durch Annahme einer auch wirklich beobachteten Veränderlichkeit in den Contractionscoefficienten eine grössere Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung herbeigeführt wird. Die Thatsache, dass die Contractionscoefficienten von 0,61 bis 1,00 zunehmen, wenn der relative Querschnitt der Ausflussöffnung von 0 bis 1 wächst, führt zu einer weit grösseren Übereinstimmung, selbst bei grösseren Durchgangsöffnungen.

Gebrauch und Beispiele der Anwendung der zusammengestellten Tabellen über die Widerstandscoefficienten.

Die gegebenen Tabellen kommen in zweierlei Fällen zur Anwendung. Entweder sucht man zur gegebenen Stellung des Hahnes u. s. w. den entsprechenden Widerstand, oder man will die

einen gewissen Widerstand bewirkende Stellung wissen. Das in beiden Fällen in Anwendung zu bringende Verfahren besteht in Folgendem:

I. Schieber.

1) Rectanguläre Schieber im parallelepipedischen Rohre.

a) Aus der lichten Höhe c des Rohres und der Stellhöhe s des Schiebers folgt der relative Querschnitt des verengten Durchganges $\frac{a_1}{a} = \frac{s}{c}$, und hieraus bestimmt sich mittels Tab. I. oder Tab. II. unmittelbar oder durch Interpoliren der entsprechende Widerstandscoefficient.

b) Aus dem gegebenen Widerstandscoefficienten findet man die entsprechende Schieberstellung, wenn man das diesem Coefficienten entsprechende Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a}$ nach den Tabellen ermittelt, und nun $s = \frac{a_1}{a} \cdot c$ setzt.

2) Kreisförmiger Schieber im cylindrischen Rohre.

a) Aus dem Halbmesser r des Rohres und der Stellhöhe s des Schiebers folgt zuerst der Hilfswinkel φ durch die Formel

$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{s}{2r}$, und hieraus das Querschnittsverhältniss

$\frac{a_1}{a} = \frac{\varphi^\circ}{180^\circ} + \frac{\sin \varphi}{\pi}$; woraus sich der Widerstandscoefficient mittels Tab. III. und Tab. IV. finden lässt.

b) Aus dem gegebenen Widerstandscoefficienten ergibt sich mittels der Tabellen $\frac{a_1}{a}$, hieraus bestimmt sich φ durch die Gleichung

$\varphi + \sin \varphi = \pi \left(\frac{a_1}{a}\right)$, wodurch sich wieder die Stellhöhe s mit Zuhilfeziehung der Formel

$$s = 2\, r \sin \frac{\varphi}{2}$$

ergibt.

II. Hähne.

1) Vierseitig gebohrter Hahn im parallelepipedischen Rohre.

a) Aus dem mittleren Halbmesser r des Hahnes und der Weite $2b$ der Bohrung (auch die des Rohres) ergibt sich zunächst das, einem gewissen Stellwinkel entsprechende, Querschnittsverhältniss durch die Formel

$\frac{a_1}{a} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{2b} \sin \varphi$, wornach sich der entsprechende Widerstandscoefficient in Tab. VII. und Tab. VIII. nachschlagen lässt.

b) Umgekehrt, hat man aus dem gegebenen Widerstandscoefficienten den Stellwinkel φ zu finden, so muss man, nachdem man mittels der Tabellen das Querschnittsverhältniss gefunden hat, den Stellwinkel aus der Gleichung

$$\cos\varphi - \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 1} \,.\, \sin\varphi = 2\left(\frac{a_1}{a}\right) - 1$$

berechnen.

2) Rundgebohrter Hahn im cylindrischen Rohre.

a) Aus dem Halbmesser r der Bohrung und dem mittleren Halbmesser R des Hahnes folgt für einen gewissen Stellwinkel ein Hilfswinkel ψ durch die Formel

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{R\sin\frac{1}{2}\varphi}{r},$$ woraus sich nun das Querschnittsverhältniss mittels folgender Formel bestimmt.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2(\psi - \sin\psi)}{\pi} + \frac{2r}{3R}\cdot\frac{\sin\varphi}{\pi}\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2\left(1 + \frac{r^2}{10R^2} + \frac{3}{20}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\right).$$

Je nachdem nun der Hahn gerade oder krumm gebohrt ist, hat man nun in Tab. XIII. oder in Tab. XVI. nachzuschlagen, um den dem gefundenen Werthe für $\frac{a_1}{a}$ entsprechenden Widerstandscoefficienten zu finden.

b) Umständlich wird die Bestimmung des Stellwinkels φ aus dem gegebenen Widerstandscoefficienten oder vielmehr aus dem durch letzteren gegebenen Querschnittsverhältnisse, doch wird dieselbe viel erleichtert, wenn man hierzu die letzten Tabellen benutzt, weil man sich durch dieselbe wenigstens Nährungswerthe für φ verschaffen kann.

Setzen wir in der obigen Formel

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{r}\cos\frac{\psi}{2},$$

also

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \frac{R^2\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{r^2}}, \text{ und } \sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{2R}{r}\cos\frac{\psi}{2}\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2},$$

so erhält man

$$\sqrt{1 - \frac{R^2\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{r^2}}\left[(\psi - \sin\psi) + \frac{2}{3}\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^2\sin\psi\left(1 + \frac{1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{10}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right)\right] = \frac{\pi a_1}{a},$$

welche Gleichung in Beziehung auf ψ aufzulösen ist, und uns in den Stand setzt, durch die Formel

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{r}\cos\frac{\psi}{2}$$ den Stellwinkel zu finden.

Übrigens wird durch anfängliche Vernachlässigung des Werthes

$$\frac{1 + \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}{10}\cdot\frac{r^2}{R^2}$$

die Auflösung noch ansehnlich erleichtert.

III. Drehklappen, und zwar

Rectanguläre und kreisförmige (doppelflügelige) Drehklappen im parallelepipedischen und cylindrischen Rohre.

a) Ist φ der Drehwinkel, so hat man den entsprechenden relativen Querschnitt der Durchgangsöffnung

$\frac{a_1}{a} = 1 - \sin \varphi$; und es gibt nun Tab. XXI. oder Tab. XXIV. u. s. w. durch Aufsuchung von $\frac{a_1}{a}$ den entsprechenden Widerstandscoefficienten.

b) Ist der Widerstandscoefficient gegeben und das Verhältniss $\frac{a_1}{a}$ durch die Tabelle bestimmt, so setze man

$\sin \varphi = 1 - \frac{a_1}{a}$, um den entsprechenden Stellwinkel zu erhalten.

IV. Ventile.

Will man für Ventile von den gefundenen Resultaten in der Praxis Gebrauch machen, so verfahre man auf folgende Weise.

a) Es sei $\frac{a_1}{a}$ der relative Querschnitt der Apertur und ζ der entsprechende Widerstandscoefficient aus einer der Tabellen XXVI. u. s. w. entnommen, dagegen sei $\frac{f_1}{f}$ der Querschnitt der Apertur für ein Ventil, dessen Widerstandscoefficienten ζ_1 man sucht; endlich sei α der beiden Fällen als gemeinschaftlich anzusehende Contractionscoefficient. Setzen wir nun nach der Theorie

$\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ und $\zeta_1 = \left(\frac{f}{\alpha f_1} - 1\right)^2$, und eliminiren aus beiden Gleichungen α, so erhalten wir

$$\zeta_1 = \left(\frac{a_1}{a} \cdot \frac{f}{f_1} (1 + \sqrt{\zeta}) - 1\right)^2.$$

Z. B. für das Ventil, auf welches sich Tab. XXVI. bezieht, ist $\frac{a_1}{a} = 0{,}356$ und bei vollständiger Öffnung des Ventiles $\zeta = 10{,}61$, daher ist für eine andere Apertur von der relativen Grösse $\frac{f_1}{f}$ der Widerstandscoefficient

$$\zeta_1 = \left(0{,}356 \frac{f}{f_1} (1 + \sqrt{10{,}61}) - 1\right)^2$$
$$= \left(1{,}515 \frac{f}{f_1} - 1\right)^2.$$

Wäre nun der relative Inhalt der Apertur $\frac{f_1}{f} = \frac{1}{2}$, so würde der Widerstandscoefficient

$\zeta_1 = (1{,}518 \,.\, 2 - 1)^2 = (2{,}03)^2 = 4{,}12$ sich ergeben;

wäre er hingegen in einem andern Falle $\frac{f_1}{f} = \frac{1}{4}$, so würde

$$\zeta_1 = (1{,}515 \,.\, 4 - 1)^2 = (5{,}06)^2 = 25{,}60$$

folgen.

Es ist einleuchtend und bekannt, dass man einen um so kleineren Widerstand erhält, je grösser der Querschnitt der Apertur ist.

Beispiel 1. Wie gross ist die Kraftreserve einer Wassersäulenmaschine, welche aus 0,2 Meter weiten Einfallröhren und einem 0,5 Meter weiten Treibecylinder besteht, und in je 6 Secunden ein Spiel von 2 Metern Extension macht, wenn die in einem geraden rundgebohrten Hahne bestehende Tagepipe um 50 Grad gedreht ist?

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in dem Treibecylinder ist $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Meter; der Querschnitt der Einfallröhre ist aber $\left(\frac{0{,}2}{0{,}5}\right)^2 = (0{,}4)^2 = 0{,}16$ mal so gross als der Querschnitt des Treibecylinders, folglich ist die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren $= \frac{1}{3} : 0{,}16 = \frac{1}{3} \cdot \frac{100}{16} = \frac{100}{48} = 2{,}083\ldots$ Meter und die entsprechende Geschwindigkeitshöhe: $\frac{v^2}{2g} = 0{,}2211$ Meter. Hätte nun der Hahn die nämlichen Dimensionsverhältnisse, wie der unseren Versuchen zum Grunde gelegte, so würde bei einer Stellung von 50 Grad der Widerstandscoefficient (s. Tab. XIII.)

$\zeta = 54{,}57$ zu setzen sein, und deshalb der entsprechende Verlust an Druckhöhe selbst

$$h = \zeta \,.\, \frac{v^2}{2g} = 54{,}57 \,.\, 0{,}2211 = 12{,}06 \text{ Meter}$$

betragen.

Das Wasserquantum, welches pro Spiel verbraucht wird, ist $\frac{\pi \,.\, (0{,}5)}{4} \,.\, 2 = \frac{\pi}{8} = 0{,}3927$ Cubikmeter $= 392{,}7$ Kilogramm; folglich ist der Verlust an mechanischer Arbeit, welchen die die Tagepipe bewirkte Verengung herbeiführt,

$$= 12{,}06 \,.\, 392{,}7 = 4736 \text{ Kilogrammmeter, also}$$

$$\text{pro Secunde} = \frac{4736}{6} = 789{,}33 \text{ Kilogrammmeter,}$$

$$= \frac{789{,}33}{75} = 10{,}5 \text{ Pferdekräfte.}$$

Dieses zum Reguliren des Ganges nöthige, dem Bremsen der Locomotiven ähnliche, Krafttödten bei Wassersäulenmaschinen ist eine bekannte und nachtheilige Eigenthümlichkeit dieser Maschinen, welche Wasserrädern nicht zukommt.

Beispiel 2. Eine cylindrischrunde Wasserleitung von 0,15 Meter Weite liefert 3 Cubikmeter Wasser in der Minute, wie muss man einen in derselben befindlichen Schieber, Hahn u. s. w. einstellen, damit sie nur noch 2 Cubikmeter Wasser in dieser Zeit liefere?

Die Geschwindigkeit im ersten Falle ist hiernach $\frac{3}{2}$ mal so gross als die bei der kleineren

Ausflussmenge, deshalb die Geschwindigkeitshöhe $= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ mal so gross als diese, und folglich die zu erzeugende Widerstandshöhe

$$\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{9}{4} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \frac{5}{4} \cdot \frac{v^2}{2g};$$ also der Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{5}{4}$.

Beim Schieber ist für $\frac{s}{2r} = \frac{19}{32}$, nach Tab. III. $\zeta = 1{,}087$ und für $\frac{s}{2r} = \frac{18}{32}$, $\zeta = 1{,}390$, folglich hat man umgekehrt dem Coefficienten $\zeta = 1{,}25$ die Stellung

$$\frac{s}{2r} = \frac{18 + \frac{1{,}390 - 1{,}250}{1{,}390 - 1{,}087}}{32} = \frac{18 + \frac{140}{303}}{32}$$

$$= \frac{18{,}462}{32} = 0{,}577$$

entsprechend herzustellen.

Nun ist aber die Röhrenweite $2r = 0{,}15$ Meter, folglich hat man die nöthige Stellhöhe

$$s = 0{,}577 \cdot 0{,}15 = 0{,}08655 \text{ Meter}$$
$$= 8\tfrac{2}{3} \text{ Centimeter.}$$

Hätte der Schieber schon am Anfange auf der Höhe von $11\frac{1}{4}$ Centimeter gestanden, wäre also dem $\frac{s}{2r} = \frac{1125}{1500} = \frac{3}{4}$ gewesen, so würde, da für diese Stellung die Tabelle den Widerstandscoefficienten 0,255 gibt, für den Coefficienten $1{,}250 + 0{,}255 = 1{,}505$ die Stellhöhe auszumitteln sein. Durch Interpolation findet man $\frac{s}{2r} = \frac{17{,}688}{32} = 0{,}554$, und hieraus wieder

$$s = 0{,}554 \cdot 0{,}15 = 0{,}0831 \text{ Meter} = 8\tfrac{1}{3} \text{ Centimeter.}$$

Beispiel. Bei einer Druckpumpe, welche eine 0,1 Meter weite Steigröhre hat, und bei jedem Spiel zu 3 Secunden 0,03 Cubikmeter Wasser liefert, ist der relative Querschnitt der Apertur im Ringe des Kegelventiles am Fusse der Steigröhre $= 0{,}4$; welchen Kraftaufwand verursacht der Durchgang durch dieses Ventil allein? Die Geschwindigkeit in der Steigröhre ist $= \frac{0{,}03 \cdot 4}{3 \cdot \pi\,(0{,}1)^2}$ $= \frac{4}{\pi} = 1{,}273$ Meter, und die entsprechende Geschwindigkeitshöhe $= 0{,}0824$ Meter.

Nun gibt aber die oben gefundene Formel $\zeta_1 = (1{,}515\,\frac{f}{f_1} - 1)^2$, $\frac{f}{f_1} = \frac{10}{4}$ gesetzt, den Widerstandscoefficienten $= (2{,}7875)^2 = 7{,}770$; folglich ist die erzeugte Widerstandshöhe $= 7{,}77 \cdot 0{,}0824 = 0{,}640$ Meter. Endlich wiegen 0,03 Cubikmeter Wasser $= 30$ Kilogramm; folglich ist die durch das Ventil in Anspruch genommene mechanische Arbeit pro Spiel $= 0{,}64 \cdot 30 = 19{,}2$ Kilogrammmeter, und pro Sec. $= \frac{19{,}2}{3} = 6{,}4$ Kilogrammmeter.

II. Nebenversuche.

A. Ausfluss durch Mündungen in der ebenen dünnen Wand.

1) Kreisförmige Öffnung.

Bei der runden Mündung im dünnen Blech (Fig. 7 Taf. I.) wurde der Durchmesser $d =$ 3,965 Centimeter gefunden, weshalb sich ihr Inhalt

$$a = \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}347 \text{ Quadratcentimeter}$$

herausstellt.

Übrigens ist $\frac{2A}{\sqrt{2g}} = 1981{,}7$ wie bei den Hauptversuchen, folglich hat man

$$\frac{2A}{a\sqrt{2g}} = 160{,}50.$$

Noch fand man die anfängliche Druckhöhe

$$h_1 = 0{,}7718 - \frac{d}{2} = 0{,}7520,$$

und die Druckhöhe am Ende der Beobachtungszeit

$h_2 = 0{,}7520 - 0{,}3580 = 0{,}3940$; folglich war die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{0{,}8672 + 0{,}6277}{2}\right)^2 = 0{,}559 \text{ Meter.}$$

Endlich war die entsprechende Ausflusszeit $\tau = 63{,}5$ Secunden; es folgt der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{2A\,(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{a\,\tau\,\sqrt{2g}} = \frac{160{,}50.\ 0{,}2395}{63{,}5}$$
$$= 0{,}6054.$$

Einige später angestellte Versuche gaben

$h_1 = 0{,}7779$ Meter,

$h_2 = 0{,}3959$ Meter und

$\tau = 66{,}5$ Secunden; weshalb sich hiernach

$$h = \left(\frac{0{,}8820 + 0{,}6292}{2}\right)^2 = 0{,}571 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{160{,}50.\ 0{,}2530}{66{,}5} = 0{,}6077$$

herausstellt.

Wir können also für eine kreisförmige Öffnung von circa 4 Centimeter Durchmesser und bei 56 bis 57 Centimeter Druckhöhe den Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{0,6054 + 0,6077}{2} = 0,6065$$

setzen.

Der ausfliessende Wasserstrahl zeigte sich vollkommen klar und durchsichtig wie Krystallglas, er floss so ruhig und regelmässig, dass eine Bewegung in ihm kaum zu bemerken war.

2) Rectanguläre Öffnung.

a) Die längere Seite horizontal.

Es wurde gefunden:
die mittlere Höhe der Ausmündung = 2,505 Centimeter, die mittlere Weite derselben = 5,052 Centimeter, daher der Inhalt

$$a = 5,052 . 2,505 = 12,655 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Ferner war

$h_1 = 0,7650 - 0,0125 = 0,7525$ Meter und

$h_2 = 0,7525 - 0,3580 = 0,3945$ Meter, endlich

$\tau = 61$ Secunden.

Hiernach folgt die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0,8675 + 0,6281}{2}\right)^2 = 0,559 \text{ Meter,}$$

und der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1981,7.\ 0,2394}{12,655 . 61} = 0,6145.$$

Um ein Beispiel für die Zunahme des Ausflusscoefficienten bei Abnahme der Druckhöhe zu erhalten, wurde noch die Zeit, innerhalb welcher sich der Wasserspiegel von der oberen Marquerspitze bis zur oberen Kante der Mündung senkte, beobachtet.

Hier war

$h_1 = 0,7525$ Meter wie vorher, dagegen

$h_2 = 0,0125$ Meter, die halbe Mündungshöhe;

endlich

$\tau = 180$ Secunden.

Hiernach ergab sich

$$h = \left(\frac{0,8675 + 0,1119}{2}\right)^2 = 0,240 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{1981,7.\ 0,7556}{12,655 . 180} = 0,6573.$$

b) Die schmälere Seite horizontal.

Hier war

$h_1 = 0,8100 - 0,0253 = 0,7847$ Meter,

$h_2 = 0,7847 - 0,3820 = 0,4027$ und

$\tau = 63,6$ Secunden.

Deshalb folgt

$$h = \left(\frac{0,8859 + 0,6347}{2}\right)^2 = 0,578 \text{ Meter und}$$

$$\mu = \frac{1981,7 .\ 0,2512}{12,655 .\ 63,6} = 0,6185.$$

Es lässt sich also diesen Versuchen zu Folge für eine mittlere Druckhöhe von 57 Centimeter und eine rectanguläre Mündung im dünnen Blech von 5 Centimeter Weite und 2½ Centimeter Höhe der Ausflusscoefficient setzen:

$$\mu = \frac{0,6145 + 0,6185}{2} = 0,6165.$$

In Fig. 13 und Fig. 14 Taf. I. sind die Grundrisse und einige Querprofile von den durch diese Öffnungen fliessenden, übrigens vollkommen durchsichtigen und einen schönen Anblick gewährenden Strahlen dargestellt.

B. Ausfluss durch kurze prismatische Ansatzröhren.

1) Cylindrische Ansatzröhre.

Die cylindrische Ansatzröhre (Fig. 9 Taf. I.) hatte 12½ Centimeter Länge und in der Ausmündung den Durchmesser $d = 3,304$ Centimeter, es war demnach der Inhalt der Ausmündung

$$a = \frac{\pi d^2}{4} = 8,5737 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Ferner wurde gefunden

$h_1 = 0,7940 - 0,0165 = 0,7775$ Meter,

$h_2 = 0,7775 - 0,3820 = 0,3955$ Meter und

$\tau = 71,5$ Secunden; folglich ist hiernach die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0,88175 + 0,62888}{2}\right)^2 = 0,571 \text{ Meter, der entsprechende Ausflusscoefficient}$$

$$\mu = \frac{1981,7 .\ 0,25287}{8,5737 .\ 71,5} = 0,8175, \text{ und der Widerstandscoefficient}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu_2} - 1 = 0,496.$$

Es geht also beim Ausfluss durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre das 0,496 fache der Geschwindigkeitshöhe an der Druckhöhe verloren.

2) Parallelepipedische Ansatzröhre.

Die parallelepipedische Ansatzröhre (Fig. 10 Taf. I.) war 12½ Centimeter lang und in der rectangulären Ausmündung 4,217 Centimeter weit und 1,910 Centimeter hoch, daher betrug der Flächeninhalt derselben

$$a = 4,217 .\ 1,910 = 8,0544 \text{ Quadratcentimeter.}$$

Es war ferner

$h_1 = 0{,}7860 - 0{,}00955 = 0{,}77645$ Meter,

$h_2 = 0{,}77645 - 0{,}38200 = 0{,}39445$ Meter, endlich

$\tau = 76$ Secunden.

Hiernach ist die mittlere Druckhöhe

$$h = \left(\frac{0{,}88116 + 0{,}62805}{2}\right)^2 = 0{,}569 \text{ Meter, und der entsprechende Ausflusscoefficient}$$

$$\mu = \frac{1981{,}7.\ 0{,}25311}{8{,}0544\ .\ 76} = 0{,}8194, \text{ der Widerstandscoefficient aber}$$

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0{,}489.$$

C. Ausfluss durch längere prismatische Ansatzröhren.

1) Cylindrische Ansatzröhre.

Die Länge dieser Röhre war $27\frac{1}{2}$ Centimeter, und ihre Weite, gemessen in der Ausmündung, $= 4{,}032$ Centimeter, daher der Inhalt derselben

$a = \pi(2{,}016)^2 = 12{,}768$ Quadratcentimeter.

Übrigens wurde gefunden

$h_1 = 0{,}7758$ und $h_2 = 0{,}3938$ Meter, endlich

$\tau = 50{,}25$ Secunden; weshalb nun folgt

die mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{0{,}8808 + 0{,}6276}{2}\right)^2 = 0{,}569 \text{ Meter,}$$

und der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1981{,}7.\ 0{,}2532}{12{,}768.\ 50{,}25} = 0{,}7822, \text{ so wie der}$$

Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0{,}634.$$

Bei der kurzen Röhre wurde er $= 0{,}496$ gefunden, folglich kann man annehmen, dass der Coefficient für den Widerstand in der Röhre selbst noch etwas kleiner als $0{,}634 - 0{,}496 = 0{,}138$ ist.

2) Parallelepipedische Ansatzröhre.

Diese Röhre war 32 Centimeter lang, und in der Ausmündung 5,018 Centimeter weit und 2,478 Centimeter hoch; es ergab sich demnach der Inhalt der Ausflussöffnung

$a = 2{,}478.\ 5{,}018 = 12{,}435$ Quadratcentimeter.

Ferner war

$h_1 = 0{,}7825$, $h_2 = 0{,}4005$ Meter und $\tau = 50{,}4$ Secunden.

Hiernach berechnet sich

die mittlere Druckhöhe $h = 0{,}576$ Meter,

der Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}7960$, und
der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}578$.

Der Widerstandscoefficient für die kurze Röhre war 0,489; folglich bleibt für den blossen Röhrenwiderstand der ohngefähre Coefficient $= 0{,}578 - 0{,}489 = 0{,}089$ übrig.

D. Ausfluss durch zusammengesetzte Röhren.

1) Cylindrische Röhren.

a) Verbindung der längeren und kürzeren Ansatzröhre (in B, 1 und in C, 1).

Die kurze Ansatzröhre wurde so tief in die längere und weitere Ansatzröhre hineingeschoben, dass eine 31,3 Centimeter lange, aus einem 18,7 Centimeter langen weiteren und aus einem 12,6 Centimeter langen engeren Stücke bestehende Verbindung (Fig. 11 Taf. I.) entstand.

α) Ausfluss durch die weite Mündung.

Der Durchmesser der Einmündung war 3,346 Centimeter, und der Durchmesser der Ausmündung 4,032 Centimeter, folglich der Inhalt von jener $a_1 = 8{,}7931$ Quadratcentimeter und von dieser $a = 12{,}768$ Quadratcentimeter.

Es wurde beobachtet
$h_1 = 0{,}7940 - 0{,}0167 = 0{,}7773$ Meter,
$h_2 = 0{,}7773 - 0{,}3820 = 0{,}3953$ Meter und
$t = 60\frac{3}{4}$ Secunden; daher ergibt sich
die mittlere Druckhöhe $h = 0{,}570$ Meter,
der Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6461$ und
der Widerstandscoefficient $\zeta = 1{,}396$.

Theoretisch lässt sich dieser Widerstandscoefficient, wenigstens annähernd, auf folgende Weise finden.

Aus dem Querschnittsverhältnisse der beiden Röhrentheile: $\frac{a}{a_1} = \frac{12{,}768}{8{,}793} = 1{,}4520$ folgt der Widerstandscoefficient für den Eintritt und die Bewegung durch die kurze Röhre:

$= \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = (1{,}452)^2 \cdot 0{,}496 = 1{,}046$, weil das Wasser in dieser 1,452mal so schnell fliesst als in der weiteren Ausflussröhre.

Ferner ist aus bekannten theoretischen Gründen der Widerstandscoefficient für den Übertritt aus der engeren Röhre in die weitere, wobei die Geschwindigkeit plötzlich im Verhältnisse $\frac{a_1}{a}$ sich verändert,

$$\left(\frac{a}{a_1} - 1\right)^2 = (0{,}452)^2 = 0{,}204.$$

Endlich ist der Coefficient für den Widerstand in der weiteren Röhre nach (C, 1) ohngefähr $= 0{,}138$ zu setzen; es gibt daher die Summe aller drei den Widerstandscoefficienten für die ganze Verbindung

$= 1{,}046 + 0{,}204 + 0{,}138 = 1{,}388$, während er durch die Beobachtung $= 1{,}396$ gefunden wurde.

β) Ausfluss durch die enge Mündung.

Hier war

$h_1 = 0{,}7758$ Meter, $h_2 = 0{,}3943$ Meter, und

$\tau = 69\frac{1}{2}$ Secunden, weshalb nun folgt:

$h = 0{,}569$ Meter,

$\mu = 0{,}8200$ und

$\zeta = 0{,}487$.

Die Theorie würde diesen Coefficienten auf folgende Weise ausmitteln.

Für die Bewegung durch die weite Röhre ist der Widerstandscoefficient

$= \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \zeta = 0{,}634 \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0{,}301$, weil das Wasser in dieser Röhre $\frac{a_1}{a}$ mal so schnell als in der Ausmündung fliesst.

Für den Eintritt und die Bewegung durch die kurze Röhre ist aber dieser Coefficient $=$ 0,496 gefunden worden, folglich wäre hiernach der Widerstandscoefficient für die ganze Röhrenverbindung

$= 0{,}301 + 0{,}496 = 0{,}797$, während die Beobachtung 0,487 gibt.

Dieser gänzliche Mangel an Übereinstimmung hat seinen Grund darin, dass die Contraction beim Eintritt aus der weiteren Röhre in die engere nicht dieselbe ist, als beim Eintritt aus einem weiten Reservoir in diese. Weil dort das Wasser schon mit einer bedeutenden Geschwindigkeit an der Stirnfläche der engeren Röhre ankommt, so ist vielmehr die Contraction viel kleiner, als wenn das beinahe ruhende Wasser in diese Röhre tritt. Der Coefficient 0,496 ist also für diesen Fall viel zu gross.

Weiter unten angeführte Versuche berechtigen uns zu dieser Annahme vollkommen. Unsere Versuche geben hiernach für den Ausfluss durch die kurze Ansatzröhre im weiteren Rohre

$\zeta = 0{,}487 - 0{,}301 = 0{,}186$, und demnach den entsprechenden Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\zeta - 1}} = 0{,}918.$$

Dieselbe Röhre im Reservoir einmündend gab

$\mu = 0{,}8175$.

b) Verbindung der vorigen Röhren mit einer langen Eisenröhre.

Es wurde eine 60 Centimeter lange cylindrische und innen nicht vollkommen polirte Eisenröhre mit ihrem 3 Centimeter langen Muff so über das äussere Ende der längeren Messingröhre weggeschoben, dass eine überall fast gleich weite Röhre von $89\frac{1}{2}$ Centimeter Länge entstand. (S. Fig. 15 Taf. I.) Der Durchmesser des genau ausgedrehten Endes dieser Eisenröhre war 4,042 Centimeter, deshalb der Querschnitt der Ausmündung

$a = \pi\ (2{,}021)^2 = 12{,}832$ Quadratcentimeter.

α) Ausfluss durch das ausgedrehte Ende der Eisenröhre.

Es war

$h_1 = 0{,}7758$ Meter, $h_2 = 0{,}3943$ Meter, und

$\tau = 55\frac{1}{4}$ Secunden, weshalb folgt

$h = 0{,}569$ Meter,

$\mu = 0{,}7068$ und

$\zeta = 1{,}002$.

Ziehen wir hiervon den Coefficienten für das Messingrohr ab, so bleibt für den eisernen Theil der Röhrenverbindung der Widerstandscoefficient

$1{,}002 - 0{,}634 = 0{,}368$.

Nach meinen eigenen Berechnungen (Polytechn. Centralblatt No. 55. 1840) muss man diesen Coefficienten

$= 0{,}0011463 \, . \, 2g\frac{l}{d}$ setzen, insofern $2g = 19{,}618$, $l = 0{,}570$ Meter die Länge des eisernen Röhrentheiles und $d = 0{,}0404$ die mittlere Weite desselben bezeichnet. Es ergibt sich hiernach dieser Coefficient

$$= 0{,}0011463 . \; 19{,}618 . \frac{0{,}57}{0{,}0404} = 0{,}317.$$

Die Abweichung von dem beobachteten Werthe 0,368 ist unter den hierbei obwaltenden Umständen zu übersehen.

β) Ausfluss durch das an das Ende der Eisenröhre angesteckte kurze cylindrische Mundstück.

Es war $a_1 = 8{,}7931$ Quadratcentimeter, und

$\tau = 72\frac{1}{2}$ Secunden, übrigens

blieb $h = 0{,}569$ wie vorhin, weshalb sich

$\mu = 0{,}7860$ und

$\zeta = 0{,}619$ ergab.

Der Theorie zu Folge wäre dieser Coefficient $= 1{,}002 . \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + 0{,}496$, wo 1,002 der vorhin gefundene Widerstandscoefficient für die Röhrenverbindung und 0,496 der oben gefundene Widerstandscoefficient für die kurze cylindrische Röhre ist. Wir erhalten hier den abweichenden Werth

$$\zeta = \frac{1{,}002}{(1{,}452)^2} + 0{,}496 = 0{,}475 + 0{,}496 = 0{,}971.$$

Diese Abweichung hat ihren Grund darin, dass die Contraction beim Eintritt aus dem langen Rohre in die kurze cylindrische Röhre kleiner ist als beim Eintritt aus einem weiten Gefässe. Wir finden vielmehr den Widerstandscoefficienten für das kurze Rohr in diesem Falle

$= 0{,}619 - 0{,}475 = 0{,}144$, und daher den Ausflusscoefficienten

$\mu = 0{,}935$.

Vorher erhielten wir ihn $= 0{,}918$.

2) Parallelepipedische Röhren.

a) Verbindung der längeren und kürzeren Ansatzröhren in B, 2 und C, 2.

Die kurze Ansatzröhre wurde so tief in das eine Ende der längeren Ansatzröhre hineingeschoben, dass eine 35¾ Centimeter lange Verbindung, wovon der weitere Theil 23¼ und der engere 12½ Centimeter lang war, entstand.

α) Ausfluss durch die weite Mündung.

Der Inhalt der Einmündung war

$a_1 = 4{,}217 . \ 1{,}940 = 8{,}1810$ Quadratcentimeter,

der Inhalt der Ausmündung aber

$a = 12{,}435$ Quadratcentimeter.

Übrigens wurde gefunden

$h_1 = 0{,}7763$, $h_2 = 0{,}3941$ Meter und

$\tau = 64{,}5$ Secunden.

Hiernach folgt die mittlere Druckhöhe

$h = 0{,}569$ Meter,

der Ausflusscoefficient

$\mu = 0{,}6259$, und der Widerstandscoefficient

$\zeta = 1{,}553$.

Der Theorie zu Folge müsste dieser Coefficient sein:

$$= 0{,}489 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a}{a_1} - 1\right)^2 + 0{,}089 \text{ (S. D, 1, } a, \alpha).$$

Nun ist aber

$$= \frac{a}{a_1} = \frac{12{,}435}{8{,}181} = 1{,}520,$$

folglich

$$0{,}489 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}489 . \ (1{,}520)^2 = 1{,}130, \text{ nnd}$$

$$\left(\frac{a}{a_1} - 1\right)^2 = (0{,}520)^2 = 0{,}270; \text{ demnach folgt}$$

$\zeta = 1{,}130 + 0{,}270 + 0{,}089 = 1{,}489$, welcher Werth von dem oben gefundenen nicht sehr abweicht.

β) Ausfluss durch die enge Mündung.

Es war $h_1 = 0{,}7801$, $h_2 = 0{,}3988$ Meter,

und $\tau = 74\frac{1}{4}$ Secunden.

Hiernach folgt

$h = 0{,}574$ Meter,

$\mu = 0{,}8212$ und

$\zeta = 0{,}482$.

Ziehen wir von diesem Coefficienten den für die weite Röhre, also $0{,}578 . \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0{,}252$, ab, so bleibt für die kurze Röhre

der Widerstandscoefficient

$\zeta = 0{,}232$, und demnach der Ausflusscoefficient

$\mu = 0{,}901$.

b) **Verbindung der vorigen Röhren mit einer langen Eisenröhre.**

Es wurde eine 61 Centimeter lange Eisenröhre mit ihrem $2\frac{1}{4}$ Centimeter langen Muff über das eine Ende der längeren Ansatzröhre, mit der sie gleichen Querschnitt hatte, so weggeschoben, dass eine gerade 90,8 Centimeter lange Verbindung von Röhren entstand. Diese Eisenröhre selbst war im Innern nicht vollkommen polirt, doch hatte man das Ausflussende genau und glatt ausschleifen lassen. Der Inhalt der Ausflussmündung war

$a = 5{,}012 .\ 2{,}494 = 12{,}490$ Quadratcentimeter.

α) Ausfluss durch das ausgeschliffene Ende der Eisenröhre.

Es war $h_1 = 0{,}7801$ Meter,

$h_2 = 0{,}3988$ Meter, und

$t = 55{,}2$ Secunden.

Deshalb folgt

$h = 0{,}574$ Meter,

$\mu = 0{,}7236$ und

$\zeta = 0{,}910$.

Für das einfache Messingrohr war der Widerstandscoefficient $= 0{,}578$, daher bleibt für die 58,8 lange Eisenröhre

$\zeta = 0{,}910 - 0{,}578 = 0{,}332$.

Frühere Untersuchungen gaben ihn

$= 0{,}0011463 .\ 2g\,\frac{l}{d}$, wo $2g = 19{,}618$, $l = 58{,}8$ und d der mittlere Durchmesser

$$= \frac{4a}{u} = \frac{2\ .\ 12{,}49}{7{,}506} = \frac{12{,}49}{3{,}753},$$

also $\frac{l}{d} = \frac{58{,}8 .\ 3{,}753}{12{,}49} = 17{,}668$ ist.

Hiernach folgt für die parallelepipedische Eisenröhre

$\zeta = 0{,}0011463 .\ 19{,}618 .\ 17{,}668 = 0{,}397$, also um

$0{,}397 - 0{,}332 = 0{,}065$ zu gross.

Oben wurde bei der cylindrischen Röhre

0,317 statt 0,368, also um 0,051 zu wenig gefunden. Es möchte also hiernach das Mittel aus beiden Beobachtungen ziemlich genau dem bekannten Widerstandscoefficienten

$0{,}0011463 .\ 2g\,\frac{l}{d}$

entsprechen.

β) Einfluss durch das kurze parallelepipedische Mundstück.

Die vorige Röhrenverbindung wurde an das im Wasserreservoir festsitzende kurze parallelepipedische Mundstück so angeschoben, dass eine einzige gerade Röhrenverbindung entstand, deren Ausmündung die vorige, also $= 12{,}49$ Quadratcentimeter, blieb.

Übrigens war $h_1 = 0{,}7763$, $h_2 = 0{,}3941$ Meter, und
$\tau = 69{,}5$ Secunden, daher
$h = 0{,}569$ Meter,
$\mu = 0{,}5783$ und
$\zeta = 1{,}990$.

Die Theorie gibt den Widerstand in der kurzen Röhre $= 0{,}489 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 1{,}130$, und den Widerstand beim Eintritt in die weite Röhre, welcher aus der plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung entspringt, $= \left(\frac{a}{a_1} - 1\right)^2 = 0{,}270$; und da der Widerstand für die lange Röhrenverbindung $= 0{,}910 - 0{,}489 = 0{,}421$ ist, so bekommt man den Widerstandscoefficienten für die ganze Verbindung

$\zeta = 1{,}130 + 0{,}270 + 0{,}421 = 1{,}921$, was mit dem oben gefundenen Werthe gut zusammenstimmt.

γ) Ausfluss durch das kurze parallelepipedische Mundstück.

Das kurze Mundstück wurde an das Ende der Eisenröhre geschoben, so dass der Einfluss durch das längere Messingrohr und der Ausfluss durch das kürzere Mundstück erfolgte.

Hier war
$a = 8{,}181$ Quadratcentimeter,
$h_1 = 0{,}7801$, $h_1 = 0{,}3988$ Meter und
$\tau = 77{,}5$ Secunden.

Deshalb folgt
$h = 0{,}574$,
$\mu = 0{,}7868$ und
$\zeta = 0{,}615$.

Hiervon $0{,}910 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}394$, als Widerstand der weiteren Röhrenverbindung subtrahirt, folgt der Widerstandscoefficient für die kurze Röhre
$\zeta = 0{,}221$, und der entsprechende Ausflusscoefficient
$\mu = 0{,}905$.

In (2, a, β) wurde $\mu = 0{,}901$ gefunden.

E. Ausfluss durch verengerte Röhren.

1) Verengungen in cylindrischen Röhren.

α) Verengter Durchgang im dünnen Blech.

Ein dünnes Messingblech mit einer kreisförmigen Mündung von 2,414 Centimeter Durchmesser wurde durch Stifte auf einen Ring von Sohlenleder (s. Fig. 16 Taf. I.) befestigt, und in die längere Messingröhre so geschoben, dass die Blechseite dem Strome entgegen zu stehen kam. Es war hiernach der Inhalt der so gebildeten Durchgangsöffnung

$a_1 = \pi \cdot (1{,}207)^2 = 4{,}5768$ Quadratcentimeter,

während der Röhrenquerschnitt den Inhalt

$a = 12{,}768$ Quadratcentimeter hatte.

Übrigens war

$h_1 = 0{,}7758$, und $h_2 = 0{,}3943$ Meter, folglich die mittlere Druckhöhe $= h = 0{,}569$ Meter.

α) Die Verengung in der Einmündung des Rohres.

Hier war die Verengung mit dem Bleche im Wasserreservoir in einerlei Ebene. Es ergab sich die Ausflusszeit $\tau = 144$ Secunden; daher der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1981{,}7 \,.\, 0{,}25286}{12{,}768 \,.\, 144} = 0{,}2725,$$

und der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 12{,}463.$$

Theoretisch lässt sich dieser Coefficient auf folgende Weise finden. Der Widerstand beim Eintritt ist, da hier die grösste Geschwindigkeit $= \frac{a}{\alpha a_1}$ mal Ausflussgeschwindigkeit plötzlich in diese übergeht, $= \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$. Nimmt man aber statt α den früher gefundenen Ausflusscoefficienten 0,6054, so erhält man

$$\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{12{,}768}{0{,}6054.\ 4{,}5768} - 1\right)^2 = 13{,}035.$$

Addirt man hierzu den Widerstandscoefficienten 0,138 für die Bewegung in der Röhre, so bekommt man den vollständigen Widerstandscoefficienten 13,173, welchem der Ausflusscoefficient

$$\mu = 0{,}2656$$

entspricht.

Die Abweichung desselben von der Beobachtung (0,2725) wird noch kleiner, wenn man, wie recht, den Contractionscoefficienten α noch etwas grösser als 0,6054 setzt.

β) Die Verengung in der Ausmündung des Rohres.

Hier fand also ein Ausfluss durch die Mündung in der dünnen Wand statt, und es ist statt a, $a_1 = 4{,}5768$ Quadratcentimeter zu setzen.

Die Ausflusszeit τ wurde $= 165\frac{1}{2}$ Secunden gefunden; weshalb der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1981{,}7.\ 0{,}2529}{4{,}5768.\ 165{,}5} = 0{,}6616$$

folgt.

Nun bringt der Eintritt und die Bewegung des Wassers in der Röhre einen durch den Coefficienten 0,634 gemessenen Widerstand hervor, es ist daher für den Ausflusscoefficienten der blossen Mündung

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\mu^2} - 0{,}634 \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 2{,}285 - 0{,}634 \left(\frac{4{,}5768}{12{,}768}\right)^2$$

$$= 2{,}285 - 0{,}128 = 2{,}157, \text{ und folglich}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2{,}157}} = 0{,}6809.$$

Dieser grosse Werth für den Coefficienten beim Ausfluss durch die Mündung im dünnen Blech entsteht daraus, dass das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit gegen die Mündung anrückt und dabei weniger contrahirt wird, als wenn es aus einem weiten Gefässe unmittelbar durch die Mündung ausfliesst.

γ) Die Verengung in der Mitte des Rohres.

Es war $t = 133$ Secunden, und daher

$\mu = 0{,}2951$, so wie

$\zeta = 10{,}493$.

Theoretisch würde dieser Werth auf folgende Weise zu bestimmen sein. Der Widerstandscoefficient für die blosse Röhre ist 0,634, und der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch die Verengung ist

$$\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$$

zu setzen.

Nehmen wir nun für α den eben gefundenen Werth 0,6809, so bekommen wir den letzten Widerstandscoefficienten

$$\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{12{,}768}{0{,}6809.\ 4{,}5768} - 1\right)^2 = 3{,}097^2 = 9{,}591.$$

Die Summe beider gibt nun den Widerstandscoefficienten für die verengte Röhre

$\zeta = 9{,}591 + 0{,}634 = 10{,}225$, und den Ausflusscoefficienten

$\mu = 0{,}2984$, während die Beobachtung 0,2951 gab.

b) Nach einer Seite conisch erweiterte Verengung.

Mit dem schon bei den Hauptversuchen (D, 2) benutzten Ringe (Fig. 17 Taf. I.) von 2,925 Aperturweite wurden noch folgende Versuche angestellt, wobei

$h_1 = 0{,}7758$ und $h_2 = 0{,}3938$, folglich

$h = 0{,}569$ Meter war.

α) Der Ring stand in der Einmündung.

Die conische Erweiterung nach innen gab $t = 60$ Secunden, die conische Erweiterung nach aussen: $t = 92{,}5$ Secunden.

Für den ersten Fall folgt

$$\mu = \frac{1981{,}7.\ 0{,}25325}{12{,}768.\ 60} = 0{,}6551, \text{ und } \zeta = 1{,}261,$$

für den zweiten Fall aber

$\mu = 0{,}4249$ und $\zeta = 4{,}541$.

Hiervon den blossen Röhrenwiderstand abgezogen, erhält man für den ersten Fall

$\zeta = 1{,}261 - 0{,}138 = 1{,}123$ und für den zweiten

$\zeta = 4{,}541 - 0{,}138 = 4{,}403$, und hiernach wieder

$\mu = 0{,}6763$ und

$\mu = 0{,}4302$.

Durch Anwendung der Formel $\left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ lassen sich aus beiden Werthen die entsprechenden C ntractionscoefficienten berechnen; es ist nämlich die Formel für dieselben

$$\alpha = \frac{a}{a_1 (1 + \sqrt{\zeta})}.$$

Nun ist der Inhalt der Apertur

$a_1 = 6,7196$ Quadratcentimeter, und $a = 12,768$,

folglich erhält man für den ersten Fall

$$\alpha = \frac{12,768}{6,7196 (1 + \sqrt{1,123})} = \frac{12,768}{6,7196.\ 2,0597} = 0,9225,$$

und für den zweiten Fall

$$\alpha = \frac{12,768}{6,7196 (1 + \sqrt{4,403})} = 0,6104.$$

β) Der Ring stand in der Ausmündung.

Die Conicität nach innen gestellt, gab $\tau = 95\frac{1}{2}$ Secunden, dieselbe nach aussen, so dass ein Ausfluss durch die dünne Wand entstand, gab $\tau = 112$ Secunden.

Hiernach ergibt sich

für den ersten Fall $\mu = \frac{1981,7.\ 0,25325}{6,7196.\ 95,5} = 0,7821$

und für den zweiten Fall $\mu = 0,6669$.

Nach Abzug der Widerstände in der Röhre findet man die Ausflusscoefficienten, welche der Mündung allein zukommen:

$$\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2 \zeta \left(\frac{a_1}{a}\right)^2}},$$ worin $\zeta = 0,634$ der Coefficient für den Widerstand der Röhre bezeichnet.

Nun ist $\zeta \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0,634. \left(\frac{6,7196}{12,768}\right)^2 = 0,176$; daher

für den ersten Fall

$$\alpha = \frac{0,7821}{\sqrt{1 - 0,107}} = \frac{0,7821}{\sqrt{0,893}} = 0,8276,$$ und

für den zweiten Fall

$$\alpha = \frac{0,6669}{\sqrt{1 - 0,078}} = \frac{0,6669}{\sqrt{0,922}} = 0,6945.$$

Es ist merkwürdig, dass die Conicität in dem Fall, wenn sich der Ring in der Einmündung befindet, mehr Einfluss hat als dann, wenn er in der Ausmündung steht und das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommt. Während für den ersten Fall $\alpha = 0,9225$ gefunden wurde, erhält man hier $\alpha = 0,8276$. Das Wachsen des Ausflusscoefficienten von 0,6104 auf 0,6945, wenn man die Durchgangsöffnung im Blech vom Eintritt zum Austritt bringt, ist aus bekannten Gründen erklärlich.

γ) Der Ring stand in der Mitte des Rohres.

War die Conicität dem Strome entgegengerichtet, so ergab sich $\tau = 64$ Secunden, in der entgegengesetzten Stellung aber war $\tau = 78\frac{1}{2}$ Secunden.

Für den ersten Fall ist hiernach

$\mu = 0{,}6141$, und $\zeta = 1{,}652$,

und für den zweiten Fall

$\mu = 0{,}5007$, und $\zeta = 2{,}989$.

Wurde der Ring der Ausflussmündung näher gebracht, so dass er nur 1 Decimeter von ihr abstand, so trat ein unruhiger und schäumender Ausfluss ein, und es stellte sich in einem Falle

$\tau = 66$, im zweiten Falle $\tau = 84$ Secunden

heraus, weshalb sich nun auch kleinere Ausflusscoefficienten ergeben, nämlich für den einen Fall

$\mu = 0{,}5949$,

und für den zweiten Fall $\mu = 0{,}4679$.

c) Ein nach beiden Seiten abgerundeter Ring.

Der in Fig. 18 Taf. I. abgebildete Ring hatte eine 2,694 Centimeter weite Apertur, bei einem Krümmungshalbmesser von 1,557 Centimeter, und war 2,535 Centimeter lang. Mit ihm wurden die vorigen Versuche bei den nämlichen Druckhöhen wiederholt, und es stellten sich folgende Ergebnisse heraus.

α) Der Ring beim Eintritt in das Rohr.

Es war $\tau = 66$ Secunden, weshalb folgt

$\mu = 0{,}5955$ und $\zeta = 1{,}821$.

β) Der Ring beim Austritt aus dem Rohre.

Hier war $\tau = 96$ Secunden, und da die Ausflussmündung $a = \pi \left(\frac{2{,}694}{2}\right)^2 = 5{,}7001$ Quadratcentimeter zu setzen ist, so folgt

$\mu = 0{,}9171$.

γ) Der Ring befand sich in der Mitte des Rohres.

Es ergab sich $\tau = 61\frac{1}{4}$ Secunden, daher

$\mu = 0{,}6417$ und $\zeta = 1{,}429$.

d) Mit dem (in D, 1, Hauptversuche) beschriebenen Ventilring mit zwei Conicitäten wurden folgende Resultate gewonnen.

α) Der Ring beim Eintritt in das Rohr.

Der längere Conus nach innen gab

$\tau = 96$ Secunden, deshalb $\mu = 0{,}4094$;

der kürzere Conus nach innen gerichtet, gab

$\tau = 108$ Secunden, folglich $\mu = 0{,}3639$.

β) Der Ring beim Austritt aus dem Rohre.

Hier ist $a = 4{,}471$ Quadratcentimeter (s. Hauptversuche D, 1).

Der längere Conus nach innen gab

$\tau = 127$ Secunden, $\mu = 0,8839$

der längere Conus nach aussen

$\tau = 137\frac{1}{2}$ Secunden, $\mu = 0,8164$.

γ) Der Ring in der Mitte des Rohres

Der längere Conus der Einmündung zugerichtet:

$\tau = 98\frac{1}{2}$ Secunden, $\mu = 0,3990$.

Der kürzere dahin gerichtet:

$\tau = 109$ Secunden, $\mu = 0,3605$.

2) Verengungen in parallelepipedischen Röhren.

Es wurden nach und nach dreierlei rectanguläre Mündungen im dünnen Bleche in die Ausmündung der längeren parallelepipedischen Ansatzröhre eingeschoben.

α) Die eine Mündung im dünnen Blech hatte den Inhalt

$a_1 = 1,516 . 0,790 = 1,1976$ Quadratcentimeter.

Es war ferner $h_1 = 0,7606$, $h_2 = 0,4026$ Meter und $\tau = 630\frac{1}{2}$ Secunden.

Hiernach folgt

$h = 0,567$ Meter und $\mu = 0,6236$.

Bei einem anderen Versuche war

$h_1 = 0,7606$, $h_2 = 0,6374$ und $\tau = 196$ Secunden,

weshalb folgt

$h = 0,698$ Meter und $\mu = 0,6226$.

Nun ist der Widerstandscoefficient für die blosse parallelepipedische Röhre $\zeta = 0,612$ (s. Hauptversuche B) und

$\frac{a_1}{a} = \frac{1,1976}{12,40} = 0,0966$; es ergibt sich daher

$\zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0,00571$, und sonach der Ausflusscoefficient für die blosse Mündung, bei Zugrundelegung der ersten Beobachtung,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \zeta\left(\frac{a_1}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2,5658}} = 0,6243.$$

β) Eine zweite Mündung im dünnen Blech hatte den Inhalt

$a_1 = 2,020 . 0,976 = 1,9715$ Quadratcentimeter.

Für $h_1 = 0,7851$, $h_2 = 0,6400$ Meter war $\tau = 137$ Secunden.

Deshalb folgt

$h = 0,711$ Meter, $\mu = 0,6314$ und $\alpha = 0,6334$.

γ) Eine dritte Mündung im dünnen Blech hatte den Inhalt

$a_1 = 2,282 . 1,100 = 2,5102$ Quadratcentimeter.

Für $h_1 = 0,7606$ und $h_2 = 0,4026$ wurde $\tau = 285$ Secunden beobachtet, weshalb

$h = 0,567$ Meter und $\mu = 0,9682$ folgt.

Für $h_1 = 0{,}7606$ und $h_2 = 0{,}6374$ war $\tau = 88\frac{3}{4}$ Secunden, weshalb sich

$$h = 0{,}698 \text{ Meter und } \mu = 0{,}6560$$

herausstellt.

Nun ist $\zeta \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 = 0{,}612 \left(\frac{2{,}5102}{12{,}40}\right)^2 = 0{,}0250$, deshalb folgt der Ausflusscoefficient für die blosse Mündung, bei Zugrundelegung der ersten Beobachtung

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2{,}3082 - 0{,}0250}} = 0{,}6618.$$

Diese drei Versuche über den Ausfluss durch die Mündung im dünnen Blech weisen auf das Überzeugendste nach, dass die Ausflusscoefficienten mit der relativen Grösse der Ausflussöffnung wachsen.

Es möchte nicht von hinreichendem Interesse sein, die Resultate einiger anderen Versuche anzugeben, doch will ich noch Folgendes anführen:

Wenn das längere cylindrische Ansatzrohr für die grössere Ausflussmenge die Ausflusszeit $\tau = 50\frac{1}{4}$ Secunden gab, so ging diese in $50\frac{1}{2}$, 51 und 52 Secunden über, wenn das Rohr mit seiner $4\frac{1}{2}$ Millimeter breiten Stirnfläche um 4, 7 und 13 Millimeter vom Blech im Kasten zurückgezogen war; dagegen blieb die Ausflusszeit $50\frac{1}{4}$ Secunden, wenn das Rohr nach Abnahme des Bleches mit seiner Stirnfläche um 2 bis 4 Centimeter weiter hineingeschoben wurde, so dass es um eben so viel von der inneren Wand des Ausflussreservoirs abstand.

Überblick der gewonnenen Resultate.

Die durch diese Nebenversuche erhaltenen Hauptergebnisse sind, kurz zusammengefasst, folgende:

1) Der Ausflusscoefficient für die kreisrunde Mündung in der dünnen Wand ist kleiner als für eine rectanguläre Öffnung, welche doppelt so hoch als weit ist. Während jener 0,6065 ist, fällt dieser 0,6165 aus.

2) Diese Ausflusscoefficienten verändern sich, wenn sich die Mündungen nicht mehr in einer grossen ebenen Wand, vor welcher das Wasser beinahe in Ruhe steht, befinden, sondern wenn die Mündung in Hinsicht auf die Wandfläche und auch die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers in Hinsicht auf die des ausfliessenden beträchtlich ist. Im letzteren Falle sind, unter übrigens gleichen Umständen, die Ausflusscoefficienten grösser als im ersten, wie folgende Übersicht vor Augen führt.

Relative Grösse der Ausmündung, den Inhalt der Wandfläche = Eins gesetzt.	Rectanguläre Mündung.			Kreisförmige Mündung.	
	0,0966	0,1590	0,2024	0,3585	0,5264
Ausflusscoefficienten.	0,6243	0,6334	0,6618	0,6809	0,6945

Es wächst also der Ausflusscoefficient mit der relativen Grösse der Mündung, und es erreichen endlich beide zugleich die Einheit, nämlich in dem Falle, wenn das Wasser durch eine einfache prismatische Röhre fliesst.

Es möge hier nicht versucht werden, aus diesen in sehr kleiner Anzahl aufgefundenen Thatsachen ein Gesetz über die Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten abzuleiten, zumal da eine neue zu diesem Zwecke besonders angestellte und sehr ausgedehnte Versuchsreihe von mir so eben erst (1842) beendigt worden ist.

3) Die Ausflusscoefficienten für kurze ($3\frac{3}{4}$ mal so lange als weite) cylindrische und parallelepipedische Ansatzröhren sind ziemlich gleich gross, nämlich 0,8175 und 0,8194 ausgefallen. Bei mehr Kürze der Röhre hätte man sie vielleicht noch etwas grösser erhalten.

4) Diese Ausflusscoefficienten für kurze prismatische Ansatzröhren verlieren ihre Richtigkeit, wenn der Querschnitt der Röhre beträchtlich ist, in Hinsicht auf den Inhalt der Wand des Gefässes, aus welchem das Wasser in die Röhre strömt. Je schmäler die Stirnfläche der Ansatzröhre, d. i. je näher der Querschnitt des ausfliessenden Strahles dem Querschnitte des zufliessenden kommt, desto mehr nähert sich auch der Ausflusscoefficient der Einheit. Das Gesetz dieser Zunahme der Ausflusscoefficienten ist ebenfalls durch neuerlich zu diesem Zwecke besonders ausgeführte Versuche vollkommen aufgefunden worden.

5) Längere, ziemlich glatte, aber nicht polirte Ausflussröhren geben eine Reibung, welche ziemlich genau durch die Druckhöhe $0{,}001146\ \frac{lv^2}{d}$, wie sie früher (Polytechn. Centralblatt, 1840, No. 55) von mir gefunden wurde, gemessen ist.

6) Der Ausdruck $\left(\frac{a}{a_1}-1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ für die Druckhöhe, welche dass Wasser verliert, wenn es aus einer Röhre vom Querschnitte a_1 in die weitere, plötzlich den Querschnitt a annehmende Röhre übergeht, hat sich als richtig bewährt.

7) Die Formel $\left(\frac{a}{\alpha a_1}-1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ für den Druckverlust beim Durchgang des Wassers durch eine Verengung vom Querschnitte a_1 in der Röhre vom Querschnitte a ist nur anwendbar, wenn für α ein gewisser Werth aus der Scale der Ausfluss- oder Contractionscoefficienten eingesetzt wird; wenn also für kleinere Werthe von $\frac{a_1}{a}$ ein kleinerer und für grössere ein grösserer Werth von α gebraucht wird. Auch dieses Gesetz ist durch die neueren vor Kurzem durchgeführten Versuche in grösserer Ausdehnung ermittelt worden.

Tabelle XXXIV.

Die, verschiedenen Ausflusscoefficienten (μ) entsprechenden Widerstandshöhen oder Druckhöhenverluste $\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)$, die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ der Einheit gleichgesetzt.

Ausfluss-coefficient μ.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_2} - 1$.	Differenzen.	Ausfluss-coefficient μ.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_2} - 1$.	Differenzen.	Ausfluss-coefficient μ.	Widerstands-coefficient $\zeta = \frac{1}{\mu_2} - 1$.	Differenzen.
0,00	∞	∞	0,40	5,250	0,301	0,80	0,563	0,039
0,01	9999	7500	0,41	4,949	0,280	0,81	0,524	0,037
0,02	2499	1389	0,42	4,669	0,261	0,82	0,487	0,035
0,03	1110	486,1	0,43	4,408	0,243	0,83	0,452	0,035
0,04	624,0	225,0	0,44	4,165	0,227	0,84	0,417	0,033
0,05	399,0	122,2	0,45	3,938	0,212	0,85	0,384	0,032
0,06	276,8	73,7	0,46	3,726	0,199	0,86	0,352	0,031
0,07	203,1	47,8	0,47	3,527	0,187	0,87	0,321	0,030
0,08	155,3	32,8	0,48	3,340	0,175	0,88	0,291	0,029
0,09	122,5	23,5	0,49	3,165	0,165	0,89	0,262	0,027
0,10	99,00	17,36	0,50	3,000	0,155	0,90	0,235	0,027
0,11	81,64	13,20	0,51	2,845	0,147	0,91	0,208	0,026
0,12	68,44	10,27	0,52	2,698	0,138	0,92	0,182	0,026
0,13	58,17	8,15	0,53	2,560	0,131	0,93	0,156	0,024
0,14	50,02	6,58	0,54	2,429	0,123	0,94	0,132	0,024
0,15	43,44	5,38	0,55	2,306	0,117	0,95	0,108	0,023
0,16	38,06	4,46	0,56	2,189	0,111	0,96	0,085	0,022
0,17	33,60	3,74	0,57	2,078	0,105	0,97	0,063	0,022
0,18	29,86	3,16	0,58	1,973	0,100	0,98	0,041	0,021
0,19	26,70	2,70	0,59	1,873	0,095	0,99	0,020	0,020
0,20	24,00	2,32	0,60	1,778	0,090	1,00	0,000	
0,21	21,68	2,02	0,61	1,688	0,087			
0,22	19,66	1,76	0,62	1,601	0,081			
0,23	17,90	1,54	0,63	1,520	0,079			
0,24	16,36	1,36	0,64	1,441	0,074			
0,25	15,00	1,21	0,65	1,367	0,071			
0,26	13,79	1,07	0,66	1,296	0,068			
0,27	12,72	0,96	0,67	1,228	0,065			
0,28	11,76	0,87	0,68	1,163	0,063			
0,29	10,89	0,78	0,69	1,100	0,059			
0,30	10,111	0,705	0,70	1,041	0,057			
0,31	9,406	0,640	0,71	0,984	0,055			
0,32	8,766	0,583	0,72	0,929	0,052			
0,33	8,183	0,532	0,73	0,877	0,051			
0,34	7,651	0,488	0,74	0,826	0,048			
0,35	7,163	0,447	0,75	0,778	0,047			
0,36	6,716	0,411	0,76	0,731	0,044			
0,37	6,305	0,380	0,77	0,687	0,043			
0,38	5,925	0,350	0,78	0,644	0,042			
0,39	5,575	0,325	0,79	0,602	0,039			

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

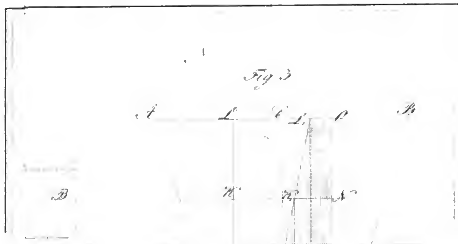
Fig 1


Fig 7


Fig 9

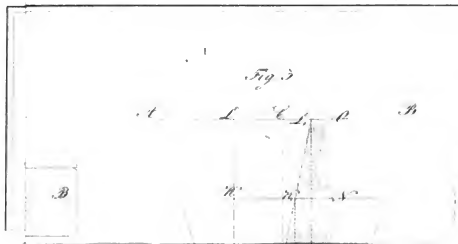

Fig 8


Fig 10


Fig 3
A
L
C
L
C
B
B
K
K
K

rd Ventile

Fig. 11.



Ventile

Taf. III



UNTERSUCHUNGEN

IN DEM

GEBIETE DER MECHANIK UND HYDRAULIK,

AUF EIGENE

BEOBACHTUNGEN UND VERSUCHE

GEGRÜNDET

VON

JULIUS WEISBACH,

PROFESSOR AN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN BERGACADEMIE ZU FREIBERG.

ZWEITE ABTHEILUNG.

VERSUCHE ÜBER DIE UNVOLLKOMMENE CONTRACTION DES WASSERS BEIM AUSFLUSS AUS RÖHREN UND GEFÄSSEN.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1843.

VERSUCHE

ÜBER DIE

UNVOLLKOMMENE CONTRACTION DES WASSERS BEIM AUSFLUSS DESSELBEN AUS RÖHREN UND GEFÄSSEN,

ANGESTELLT UND BERECHNET

VON

JULIUS WEISBACH,

PROFESSOR AN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN BERGACADEMIE ZU FREIBERG.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG,

WEIDMANN'SCHE BUCHHANDLUNG.

1843.

Vorrede.

Nachdem mich meine Versuche über den Ausfluss des Wassers durch Schieber, Hähne u. s. w. darauf geführt hatten, dass ein grosser Theil von den Lehren der Hydraulik nur dann erst seine Richtigkeit gewinnt und in der Anwendung brauchbar wird, wenn man von der seither bekannten Contraction des aus einem grossen Gefässe ausfliessenden Wasserstrahles diejenige Contraction unterscheidet und näher kennt, welcher der Strahl unterworfen ist, wenn das Wasser aus einem kleineren Gefässe ausströmt und nicht als vor der Mündung stillstehend, sondern als an diese mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommend angesehen werden darf, so war ich darauf bedacht, so bald wie möglich ausführliche Versuche über die letzte, seither noch ganz unbekannte Erscheinung der Contraction anzustellen. Ich ging deshalb schon im Frühling des vorigen Jahres (1842) an die Ausführung dieser Versuche, und bin nun in den Stand gesetzt, die Ergebnisse derselben an diesem Orte zu veröffentlichen.

Es bedarf wohl kaum einer Rechtfertigung, dass ich die erste Art der Contraction des Wasserstrahles die vollkommene und die zweite Art die unvollkommene Contractin genannt habe. Da die Zusammenziehung des Wasserstrahles grösser ist, wenn das vor der Ausflussöffnung befindliche Wasser beinahe still steht, als wenn es mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit derselben zuströmt, da also jene Contraction gleichsam ein Maximum von dieser ist, so schien mir die Wahl dieser Namen nicht unpassend, auch war wohl durch dieselbe eine Verwechselung mit der aus anderen Gründen durch andere Hydrauliker schon früher gemachten Eintheilung der Contraction in die vollständige und unvollständige oder partielle nicht zu befürchten.

Die vollkommene Contraction ist, kleine Abweichungen abgerechnet, unveränderlich, d. i. das Verhältniss des kleinsten Querschnittes vom zusammengezogenen Wasserstrahle zum Querschnitt der Ausflussöffnung oder der sogenannte Contractionscoefficient ist bei verschiedenen Mündungen so ziemlich immer einer und derselbe, anders aber ist es bei der unvollkommenen Contraction, denn hier hängt jenes Querschnittsverhältniss auch noch von der Grösse der Oeffnung oder vielmehr von dem Verhältniss derselben zu der Grösse der ebenen Fläche, worin diese befindlich ist, ab; je grösser die Ausflussöffnung in Hinsicht auf die Wand- oder Bodenfläche, welche diese enthält, oder je grösser die Geschwindigkeit des der Mündung zuströmenden Wassers ist, desto grösser ist auch der Contractionscoefficient oder jenes Querschnittsverhältniss, d. i. desto weniger ist auch der Wasserstrahl zusammengezogen.

Diese Veränderlichkeit der Contractionscoefficienten bei unvollkommener Contraction machte es nothwendig, unter verschiedenen Umständen und Verhältnissen möglichst viel Versuche oder vielmehr ganze Reihen von Versuchen anzustellen, denn es handelte sich hier nicht um die Ausmittelung einer einzigen Grösse, sondern um das Auffinden eines durch eine Gleichung auszudrückenden Naturgesetzes. Da es am Ende eine vergebliche Mühe gewesen wäre, dieses Gesetz *a priori* aufzufinden, so waren ebenso auch viele Rechnungsversuche nothwendig, um jenes Gesetz oder eine Gleichung zu entdecken, welche die sämmtlichen Resultate einer oder nach Befinden mehrerer Versuchsreihen gleichsam zu einem Ganzen vereinigt und uns in den Stand setzt, für andere zwischen den Beobachtungen inne liegende Fälle die Stärke der Contraction oder den Contractionscoefficienten durch Rechnung zu finden. Sachkenner mögen beurtheilen, ob mir dies gelungen sei! Wiewohl ich weder Mühe noch Zeit gespart habe, um durch die vorliegenden Untersuchungen das mir gesteckte Ziel zu erreichen, so finde ich denn doch auch, dass dieselben noch Manches zu wünschen übrig lassen. Ich habe zwar die Ueberzeugung, dass die von mir gefundenen Formeln und die nach diesen berechneten Tabellen für die

praktische Anwendung vollkommen genügende Genauigkeit gewähren, glaube aber auch, dass noch andere, vielleicht weniger einfache Formeln hätten ausgemittelt werden können, die sich an die Resultate der Beobachtung und deshalb wohl auch an das ihnen zum Grunde liegende Naturgesetz noch näher anschliessen als die meinigen.

Manche von anderen Hydraulikern beobachtete Verhältnisse und Abweichungen lassen sich durch das Gesetz der unvollkommenen Contraction erklären; ich habe schon in der Vorrede zur ersten Abtheilung dieser Schrift darauf aufmerksam gemacht, und will deshalb hier nur noch der Versuche von *Castel* und *D'Aubuisson* über den Ausfluss durch Ueberfälle*) gedenken. Diese Hydrauliker fanden, dass die Abflussmenge bei Ueberfällen unter übrigens gleichen Umständen wächst mit dem Verhältniss zwischen der Breite des Ueberfalles und der des Canales, und dass dieselbe am grössten ist, wenn der Ueberfall die ganze Breite des Canales einnimmt**). Betrachtet man die bei diesen Versuchen vorgekommenen Maassverhältnisse etwas näher, so überzeugt man sich sehr bald, dass hier das dem Ueberfall zufliessende Wasser eine nicht unbeträchtliche und mit der Breite des Ueberfalles grösser werdende Geschwindigkeit gehabt hat, und dass daher auch die Contraction des abfliessenden Wasserstromes nur eine unvollkommene war. Da nun aber bei der unvollkommenen Contraction der Contractions- und also auch der Ausflusscoefficient um so grösser ausfällt, je grösser die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers ist, so findet sich jene von *Castel* und *D'Aubuisson* beobachtete Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten in der unvollkommenen Contraction vollkommen gegründet.

Die Versuche, welche den vorliegenden Untersuchungen zum Grunde gelegt wurden, sind allerdings bei kleinen, noch nicht ein Meter betragenden Druckhöhen angestellt worden, und es entsteht deshalb die sehr natürliche Frage: bis auf welchen Genauigkeitsgrad lassen sich dieselben auch auf den Ausfluss unter grösserem Drucke anwenden? Ich vermag jetzt nicht, diese Frage vollständig zu beantworten, kann jedoch versichern, dass einige vorläufige Berechnungen von im letzten Sommer (1843) ausgeführten Versuchen über den Ausfluss unter *circa* 3 Meter Druckhöhe nur auf unbedeutende Abweichungen geführt haben.

Die zuletzt erwähnten Versuche wurden mit einem ganz neuen Apparat, aus dem ich das Wasser unter constantem Druck ausfliessen lassen konnte, angestellt; sie bestanden nicht bloss in einer theilweisen Wiederholung der älteren (1841 und 1842 angestellten) Versuche, sondern sie hatten auch den Zweck, neue, noch nicht oder wenigstens nicht hinreichend bekannte Verhältnisse beim Ausfluss des Wassers auszumitteln, wie z. B. die beim Ausfluss durch schiefe Ansatzröhren, durch gebrochene und krumme Röhren u. s. w. Sollte der Verlagshandlung, welcher ich schon wegen der ausgezeichneten Ausstattung dieser Schriften zu vielem Dank verpflichtet bin, durch guten Absatz derselben Aufmunterung zur Fortsetzung zu Theil werden, so würde in einem der folgenden Jahre zur Veröffentlichung der durch die letzten Versuche gewonnenen Ergebnisse geschritten werden können.

Auch bei Ausführung dieser Versuche hat mir Herr *Ritter* seine mit vieler Aufopferung verknüpfte und den guten Fortgang sehr fördernde Unterstützung zu Theil werden lassen, welches rühmlichst zu erwähnen ich nicht unterlassen konnte.

*) *D'Aubuisson, Traité d'Hydraulique, II. édit. Annales des ponts et chaussées, I. sér. I. sem.* Allgemeine Maschinenencyclopädie, Art. „Ausfluss".

**) Nach jenen Versuchen sind unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen

bei den relativen Breiten der Ueberfälle	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,25
die Ausflusscoefficienten:	0,664	0,657	0,646	0,635	0,624	0,615	0,608	0,599	0,596.

Freiberg im October 1843.

Der Verfasser.

Inhalt.

C. Versuche über den Ausfluss durch innere Ansatzröhren.

Tabellen für den praktischen Gebrauch.

Einleitung.

Die Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausflusse aus Gefässen, deren Ergebnisse hier zusammengestellt sind, wurden in den Monaten Mai, Juni, Juli, August und September des Jahres 1842 durchgeführt. Das hierzu in Anwendung gekommene Gefäss war der in der ersten Abtheilung beschriebene und bei früheren Versuchen über den Ausfluss durch Schieber, Hähne u. s. w. gebrauchte parallelepipedische Kasten von 93 Centimeter Höhe und 66 Centimeter Länge und Weite. Doch wurde dieser Kasten dies Mal nicht auf Böcke, sondern auf eine aus zwei horizontal liegenden Schwellen gebildete Bank, unter welcher ein Abzugsgraben hinlief, gestellt. Zum lothrechten Einstellen seiner Seitenflächen dienten harte Holzkeile, die zwischen die Füsse des Kastens und die darunter befindlichen Schwellen eingetrieben wurden. Das Wasser zum Füllen des Kastens floss durch ein enges und kurzes Gerinne zu, welches mit dem Aufschlaggraben bei der Erzwäsche zu Vergnügte Anweisung sammt Reussen durch eine Drehschütze in und ausser Communication gesetzt werden konnte.

Als Marqueur zur Beobachtung der Wasserstände dienten die schon in der ersten Abtheilung beschriebenen knieförmig gebogenen Eisenspitzen, doch waren dieselben in grösserer Anzahl in einer Seitenwand über einander eingeschraubt, weil diese Versuche bei 2, 3, 4 bis 5 verschiedenen Druckhöhen angestellt wurden. Werden die einzelnen Marqueurspitzen, von oben nach unten gegangen, mit No. 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnet, so sind ihre Vertikalabstände folgende:

Abstand	der	Spitzen	1	und	2 = $14\frac{1}{2}$	Centimeter
"	"	"	1	"	3 = 38	"
"	"	"	1	"	4 = $54\frac{1}{2}$	"
"	"	"	1	"	5 = 67	"
"	"	"	1	"	6 = 73	"

Diese Zahlenwerthe drücken jedoch nur die mittleren Abstände aus; da die Versuche oft, und zuweilen auf längere Zeit unterbrochen werden mussten, so war es nöthig, an jedem Beobachtungstage das Ausmessen dieser Entfernungen ein und nach Befinden zwei Mal zu wiederholen. Das Aufstellen und das Wegschaffen des Wasserkastens an jedem Tage der Versuche, so wie das Einsetzen und Herausnehmen der verschiedenen Mundstücke aus demselben, gaben vielfache Veranlassung zum zufälligen Verbiegen dieser Spitzen, weshalb es nicht auffallen darf, wenn die unten jedem Versuche vorgesetzten Niveauabstände von den oben angegebenen mittleren Abständen zuweilen nicht wenig abweichen.

Der Abstand der Mitte der Ausflussöffnung von der ersten oder oberen Spitze konnte bei jedem Versuche noch weniger genau einer und derselbe bleiben, weil dieser von dem Einsetzen des Mundstückes abhing; doch lag derselbe stets innerhalb der Grenzen 77 und 79 Centimeter.

Die gewöhnlichen Versuche waren diejenigen, bei welchen die von der ersten und dritten und die von der dritten und fünften Spitze abgeschnittenen Wassermengen, erstere von circa 167 und letztere von 128 Liter, ausfloss. Sehr oft beobachtete man aber auch den Ausfluss der Wassermenge zwischen der zweiten und vierten Spitze, welche circa 176 Liter mass. Nur bei sehr kleinen Ausflussöffnungen, wo die Zeit des Ausflusses sehr lange dauerte, wurde von der ersten bis zweiten, und überhaupt von der einen Spitze bis zur nächstfolgenden beobachtet. In einigen wenigen Fällen wurde endlich auch bis zur sechsten Spitze herab beobachtet, nämlich dann, wenn es von besonderem Interesse war, den Ausflusscoefficienten bei sehr kleiner Druckhöhe kennen zu lernen.

Die Ausflusszeit, d. i. die Zeit, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von einer Spitze bis zur anderen herabsank, wurde mittels der schon bei den älteren Versuchen gebrauchten, halbe Secunden schlagenden Uhr beobachtet.

Jeder einzelne Versuch wurde wenigstens ein Mal wiederholt, zuweilen, namentlich dann, wenn sich unerwartet grössere Differenzen herausstellten, zwei Mal und öfter. Die kleinste Beobachtungszeit war 40 Secunden, die grösste aber 1500 Secunden; bei jener fand sich höchstens eine Abweichung der einzelnen Versuche unter einander von $\frac{1}{2}$ Secunde und bei dieser eine solche von 5 Secunden vor.

Zum Einsetzen der Mundstücke dienten zwei in den entgegengesetzten Seiten des Kastens befindliche runde, 7 Centimeter weite und 9 Centimeter vom Boden des Kastens abstehende Seitenlöcher. Die Mundstücke selbst wurden aber nicht unmittelbar in diese Löcher eingesetzt, sondern zunächst auf gut abgehobelte Bretchen von 2 bis 4 Centimeter Dicke und 20 Centimeter Seitenlänge aufgenagelt oder aufgeschraubt. Diese Bretchen wurden, nachdem man sie des genauen Abschlusses wegen auf der äusseren Seite mit einigen Papierlagen bedeckt hatte, von innen auf die Löcher im Kasten aufgelegt und so mittels 8 Nägel oder Schrauben an der Wandfläche befestigt. Diese Art des Einsetzens der Mundstücke, mochten dieselben aus blossen Blechmündungen, kurzen oder längeren Röhren bestehen, bewährte sich als viel einfacher und bequemer als das bei den früher angestellten Versuchen angewendete Verfahren.

Zum Verschliessen der Mündungen dienten für jede Mündung besonders geschnitzte oder abgedrehte Holzstöpsel.

In der Regel erfolgte der Ausfluss in die freie Luft, doch wurden auch mehrere Versuche beim Ausflusse unter Wasser angestellt. Zu diesem Zwecke wurde ein $1\frac{3}{4}$ Meter langer, $\frac{3}{4}$ Meter weiter und 3 Decimeter tiefer Kasten so neben dem Ausflusskasten aufgestellt, dass dessen offene Fläche horizontal lag und der hier in einer Röhre bestehende Ausflussapparat nur 5 Centimeter über dem Boden in demselben ausmündete. Diese Vorlage musste natürlich vor jedem Versuche vollkommen mit Wasser angefüllt werden. Während des Versuches floss das Wasser ringsum über und an den Seitenflächen herunter.

Der Querschnitt des Gefässes wurde an fünf verschiedenen Stellen, nämlich im Niveau der ersten, dritten und fünften Spitze und mitten zwischen der ersten und dritten, so wie zwischen der dritten und fünften Spitze gemessen. Die Breite und Länge eines jeden Querprofiles wurde aber wieder drei Mal, nämlich an den Enden und in der Mitte gemessen, wie schon Fig. 12 Taf. I. der

ersten Abtheilung vor Augen geführt hat. Zur Ausmittelung der mittleren Länge und Breite eines Querprofiles und zur Inhalts-Bestimmung des mittleren Querschnittes wurde die *Simpson*'sche Regel angewendet.

Querschnitt I. durch die Spitze No. 1.

Längen: 0,6667; 0,6700 und 0,6675 Meter.
Mittlere Länge: 0,66903 Meter.
Breiten: 0,6575; 0,6597 und 0,6580 Meter.
Mittlere Breite: 0,65905 Meter.
Inhalt: 0,66903. 0,65905 = 0,44092 Quadratmeter.

Querschnitt II. zwischen den Spitzen No. 1 und No. 3.

Längen: 0,6646; 0,6666 und 0,6668 Meter.
Mittlere Länge: 0,66630 Meter.
Breiten: 0,6585; 0,6582 und 0,6590 Meter.
Mittlere Länge: 0,65838 Meter.
Inhalt: 0,66630. 0,65838 = 0,43868 Quadratmeter.

Querschnitt III. durch die Spitze No. 3.

Längen: 0,6650; 0,6666 und 0,6655 Meter.
Mittlere Länge: 0,66615 Meter.
Breiten: 0,6597; 0,6618 und 0,6600 Meter.
Mittlere Breite: 0,66115 Meter.
Inhalt: 0,66615. 0,66115 = 0,44043 Quadratmeter.

Aus diesen drei Querschnitten ergiebt sich der mittlere Querschnitt für den Ausfluss der Wassermenge zwischen der ersten und dritten Spitze oder bei der grösseren Druckhöhe von 0,58 bis 0,60 Meter:

$$A_1 = \frac{0{,}44092 + 4.\ 0{,}43868 + 0{,}44043}{6}$$

$$= 0{,}43934 \text{ Quadratmeter.}$$

Die Messungen im vorigen Jahre gaben $A_1 = 0{,}43887$ Quadratmeter (s. erste Abtheilung Seite 5).

Querschnitt IV. zwischen den Spitzen No. 3 und No. 5.

Längen: 0,6686; 0,6646 und 0,6645 Meter.
Mittlere Länge: 0,66525 Meter.
Breiten: 0,6600; 0,6610 und 0,6600 Meter.
Mittlere Breite: 0,66067 Meter.
Inhalt: 0,66525. 0,66067 = 0, 43951 Quadratmeter.

Querschnitt V. durch die Spitze No. 5.

Längen: 0,6623; 0,6640 und 0,6640 Meter.
Mittlere Länge: 0,66372 Meter.
Breiten: 0,6600; 0,6617 und 0,6600 Meter.
Mittlere Breite: 0,66113 Meter.
Inhalt: 0,66372. 0,66113 = 0,43881 Quadratmeter.

Aus den Querschnitten III., IV. und V. folgt der mittlere Querschnitt für den Ausfluss der Wassermenge zwischen der dritten und fünften Spitze oder bei der kleineren mittleren Druckhöhe von 0,25 bis 0,27 Meter:

$$A_2 = \frac{0{,}44043 + 4.\ 0{,}43951 + 0{,}43881}{6}$$
$$= 0{,}43954 \text{ Quadratmeter.}$$

Wegen der geringen Abweichung der Querschnitte A_1 und A_2 von einander ist es gestattet, den mittleren Querschnitt für den Ausfluss der Wassermenge zwischen der zweiten und vierten Spitze oder bei einer mittleren Druckhöhe von 0,42 bis 0,45 Meter

$$= \frac{0{,}43934 + 0{,}43954}{2} = 0{,}43944 \text{ Quadratmeter}$$

zu setzen.

Es bezeichne, wie in der ersten Abtheilung:
A den Querschnitt des Ausflusskastens,
a den Querschnitt der Ausmündung,
h_1 die Druckhöhe am Anfang und
h_2 die Druckhöhe am Ende der Beobachtungszeit, von den Marqueurspitzen bis zur Mitte der Ausmündung gemessen.

Ferner sei τ die Ausflusszeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel von der einen Spitze, z. B. der ersten, zu einer anderen, z. B. der dritten, herabsinkt.

Ist nun noch $g = 9{,}81$ Meter die Beschleunigung der Schwere an dem Beobachtungsorte, und μ der Ausflusscoefficient oder das Verhältniss der effectiven Ausflussmenge zur hypothetischen, so hat man den der Druckhöhe

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2$$

entsprechenden Ausflusscoefficienten

$$\mu = \frac{A\,(h_1 - h_2)}{a\tau\sqrt{2gh}} = \frac{2A}{a\tau\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)$$

zu setzen.

Nun ist Log $\sqrt{2g} = 0{,}6463495$,
für die grössere Druckhöhe Log $2A = 0{,}9438307 - 1$ und
" " kleinere " " " $= 0{,}9440235 - 1$,

daher lässt sich im ersten Falle setzen:

$$\text{Log}\ \frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}2974812 - 1,\quad \frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}19837;$$

und im zweiten Falle:

$$\text{Log}\ \frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}2976740 - 1,\quad \frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}19846.$$

Das arithmetische Mittel gibt für eine mittlere Druckhöhe, der zwischen der zweiten und vierten Spitze befindlichen Ausflussmenge entsprechend:

$$\text{Log}\,\frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}2975771 - 1,\ \frac{2A}{\sqrt{2g}} = 0{,}19841.$$

Die oben angegebenen Formeln setzen voraus, dass das Wasser mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ ausfliesse, wenn der Wasserspiegel um die Höhe z über der Mitte der Mündung steht. Da aber beim Anfang des Ausflusses der Wasserspiegel oft nur drei Centimeter über der Spitze stand, bei deren Austritt aus dem Wasser die Beobachtungszeit ihren Anfang nahm, so wäre es möglich, dass die Trägheit der anfänglich vollkommen in Ruhe befindlichen Wassermasse im Reservoir die Ausflussgeschwindigkeit im Anfange der Beobachtungszeit noch bemerkbar verzögerte. Die genauere Formel für die Ausflussgeschwindigkeit ist (s. *Poisson Traité de Mécanique, Tome II. p.* 783)

$$v = \frac{A}{a}\sqrt{2gz}\ \sqrt{\frac{1-\left(\frac{z}{H}\right)^{\left(\frac{A}{a}\right)^2-2}}{\left(\frac{A}{a}\right)^2-2}},$$

worin H die anfängliche Druckhöhe beim Eintritt des Ausflusses bezeichnet.

Setzen wir in dieser Formel $\frac{A}{a} = 300$, welcher Werth jedoch sicherlich noch zu klein ist, und nehmen wir $\frac{z}{H} = 0{,}99$, welcher Werth jedoch in allen Fällen zu gross ist, so erhalten wir

$$v = \sqrt{2gz}\ \sqrt{\frac{90000}{90000-2}\left(1-(0{,}99)^{90000-2}\right)}$$

$$= \sqrt{2gz}\ \sqrt{\frac{90000\left(1-(0{,}99)^{89998}\right)}{89998}}.$$

Nun ist aber $(0{,}99)^{89998}$ = Null zu setzen, folglich ergibt sich

$$v = \sqrt{2gz}.\ \sqrt{\frac{90000}{89998}} = 1{,}00001\ \sqrt{2gz}.$$

Die allgemeine Formel gibt also unter diesen Verhältnissen sogar etwas mehr als die Formel $v = \sqrt{2gz}$, welche den Berechnungen unserer Versuche zu Grunde liegt; da aber die Abweichung die Grenzen der Beobachtungsfehler noch weit überschreitet, so ist es nicht nöthig, auf diese Rücksicht zu nehmen.

Wenn das Wasser durch eine Öffnung in einer dünnen ebenen Wand aus einem Gefässe ausfliesst, so bildet dasselbe keineswegs einen aus parallelen Fäden bestehenden prismatischen Strahl, sondern dieser zieht sich zusammen, so dass er in einiger Entfernung bedeutend schwächer ist als in der Mündung. Diese Erscheinung der Contraction des Wasserstrahles ist zwar längst bekannt, allein die vielfältigen Modificationen, welcher diese fähig und denen sie in der praktischen Hydraulik wirklich unterworfen ist, kennt man noch sehr wenig. Die Contraction wird geringer, wenn die Fläche, worin sich die Mündung befindet, hohl ist, und stärker, wenn dieselbe convex ist; sie ist am kleinsten beim Durchgang durch ein nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformtes Mundstück, und am grössten beim Ausfluss durch eine kurze nach innen gerichtete cylindrische Ansatzröhre, die vom

Wasser nicht ausgefüllt wird. Über das erste Verhältniss haben *Michelotti* und *Eytelwein*, über das letztere aber *Borda* und *Bidone* Versuche angestellt. Wir haben beide Versuche wiederholt und die Ergebnisse derselben in dem Abschnitte über die Nebenversuche mitgetheilt. Die Contraction wird ferner modificirt, wenn die Mündung inwendig mit Blechen besetzt (eingefasst) ist oder bis an eine oder mehrere Seitenwände reicht. Sämmtliche hier vorkommende Erscheinungen gehören der partiellen Contraction an und sind zuerst von *Bidone* untersucht worden. Auch wir haben einige Versuche hierüber angestellt und deren Resultate unter den Nebenversuchen mitgetheilt.

Von allen diesen Modificationen der Contraction ist jedoch die unvollkommene Contraction, wegen welcher diese Versuche vorzüglich angestellt worden sind, verschieden. Ist der Inhalt der Mündung klein in Beziehung auf die Wand- oder Bodenfläche, worin dieselbe sich befindet, so steht das Wasser vor der Mündung beinahe in Ruhe, ist aber der Inhalt der Mündung beträchtlich in Beziehung auf die Gefässwand oder auf den Querschnitt des Gefässes, so kommt das Wasser auch schon mit einer nicht unbedeutenden Geschwindigkeit vor der Mündung an, durch welche es nachher zum Ausflusse gelangt. Es ist längst bekannt, dass unter übrigens gleichen Umständen im zweiten Falle die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers und deshalb auch die Ausflussmenge grösser ist als im ersten Falle; dagegen unbekannt war es seither, dass im zweiten Falle auch die Contraction unbedeutender und deshalb die Ausflussmenge aus zwei Gründen grösser ist als im ersten Falle. Es ist also die Contraction des mit einer gewissen Geschwindigkeit ankommenden Wassers von der Contraction des vor der Mündung beinahe in Ruhe befindlichen Wassers zu unterscheiden, und es schien uns angemessen, diese die vollkommene und jene die unvollkommene Contraction zu nennen. Der Hauptzweck der Versuche in dieser zweiten Abtheilung war dahin gerichtet, das Gesetz der unvollkommenen Contraction, oder die Abhängigkeit des Contractionscoefficienten (α) von dem Verhältniss zwischen dem Querschnitt (a) der Mündung und dem Querschnitt (a_1) des vor dieser ankommenden Wassers auszumitteln. Bei der vollkommenen Contraction ist dieses Verhältniss beinahe Null und der Contractionscoefficient ein Minimum, nämlich circa 0,64, je grösser aber das Querschnittsverhältniss wird, desto grösser fällt auch der Contractionscoefficient aus. Ist dieses Verhältniss nahe $= 1$, so muss auch der entsprechende Contractionscoefficient sich der Einheit nähern. Um nun das Gesetz der Abhängigkeit zwischen dem Contractionscoefficienten (α) und dem relativen Querschnitt $\left(\frac{a}{a_1}\right)$ der Mündung durch Versuche zu ermitteln, standen zwei Wege offen. Entweder konnte ein und dasselbe Mundstück nach und nach in die Ausmündungen von in der Weite von einander verschiedenen Röhren eingesetzt werden, oder man konnte verschieden weite Mundstücke nach und nach in das Ende einer und derselben Röhre einsetzen. Ich will nicht behaupten, dass die letztere Methode die bessere ist, weil es aber einfacher ist, durch allmähliges Ausbohren eines und desselben Mundstückes eine Reihe von Mündungen zu erzeugen, so kam das zuletzt genannte Verfahren in Anwendung. Da der Ausflusscoefficient selbst bei vollkommener Contraction nicht constant, sondern bei absolut kleineren Mündungen grösser ist als bei grösseren Mündungen, so erforderte allerdings diese zweite Methode auch noch das Einsetzen der Mundstücke in die grosse ebene Wand, um dadurch eine genaue Vergleichung der unvollkommenen Contraction mit der vollkommenen möglich zu machen.

Die unvollkommene Contraction macht sich auch beim Durchgang des Wassers durch Ver-

engungen in Röhren und beim Ausfluss durch Ansatzröhren bemerkbar. Die Formel für den durch eine Verengung vom relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1}$ herbeigeführten Druckhöhenverlust $\left(\frac{a_1}{\alpha a} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$, so wie die dem Eintritt des Wassers in eine prismatische Röhre vom relativen Querschnitte $\frac{a}{a_1}$ entsprechende Widerstandshöhe $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ bewähren sich nur dann als richtig, wenn man einen veränderlichen und von dem Querschnittsverhältnisse $\frac{a}{a_1}$ abhängigen Contractionscoefficienten α in dieselben einführt. Um sich jedoch von der Richtigkeit dieser Voraussetzung vollkommen zu überzeugen, wurden auch ausgedehnte Versuchsreihen über den Durchgang des Wassers durch Verengungen, so wie über den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren unter den oben angeführten Umständen angestellt.

In der Regel liess man das Wasser durch kreisförmige Mündungen ausfliessen, doch kamen auch einige rectanguläre Durchgangs- und Ausflussöffnungen in Anwendung.

Zu den Versuchen über den Ausfluss des Wassers durch runde Mündungen und Verengungen in Röhren wurde eine $27\frac{1}{2}$ Centimeter lange und 4 Centimeter weite cylindrische Messingröhre *AB* (Fig. 1 Taf. I.) angewendet. Sie wurde mit dem an ihrer Stirnfläche aufgelötheten Messingbleche *CD* auf das Bretchen *EF* und dieses wieder, nachdem man die Röhre von innen heraus durch das Loch *GH* im Wasserkasten gesteckt hatte, auf die Seitenwand *KL* des letzteren aufgenagelt. Den um die Röhre herum offen gebliebenen Raum verstopfte man durch in Inselt getränkte Holzkeile. Zum Öffnen und Schliessen der Röhre diente ein kreisförmiger Schieber *M*. Das Mundstück *ONP* selbst bestand in einer genau aus- und abgedrehten Messingscheibe, wie Fig. 2 vor Augen führt. Die dem Wasser zugekehrte Seite *OP* von diesem war ganz eben abgedreht und vollkommen polirt; die Mündung *N* war nach der entgegengesetzten Seite conisch ausgedreht, damit das Wasser vollkommen frei, und ohne sich an die Umfangfläche anzulegen, ausfliessen konnte. Vor dem Einsetzen eines solchen Mundstückes wurde der äusserste Umfang desselben mit einem schmalen, mit Inselt bestrichenen Papierstreifen umzogen, und nach dem, durch Andrücken und Umdrehen bewerkstelligten Einsetzen musste dieser Papierring vollkommen wasserdichten Verschluss gewähren; ausserdem wurde er wieder herausgenommen und durch einen neuen ersetzt.

Um aber nicht bloss die Verhältnisse des Ausflusses durch die Mündungen in der dünnen Wand, sondern auch die Wirkungen der Verengungen kennen zu lernen, wurde dasselbe Mundstück auch in die Mitte des Rohres und in die Einmündung desselben geschoben und bei diesen Ständen die Versuche wiederholt.

Es waren allerdings nur drei solcher Mundstücke zum Einsetzen in das Messingrohr vorhanden, allein jedes derselben wurde nach und nach weiter ausgedreht, und deshalb erhielt man 17 verschiedene kreisrunde Ausflussmündungen von 0,866 bis 3,748 Centimeter Weite, welche man nach und nach alle in das Messingrohr einsetzte.

Meistens wurde auch noch eine 60 Centimeter lange Eisenröhre an das Ende *B* der Messingröhre angesetzt, so dass dadurch eine $84\frac{1}{2}$ Centimeter lange und circa 4 Centimeter weite Röhre entstand. Die Resultate, welche man erhielt, wenn man die Mundstücke in die Ausmündung dieser

langen Röhre eingesetzt hatte, waren nur wenig verschieden von denjenigen, welche man erhielt, wenn diese Mundstücke in der Ausmündung des Messingrohres sassen, dagegen fielen die Verhältnisse zuweilen anders aus, wenn das Mundstück am Anfang oder in der Mitte des Messingrohres befindlich war; es wurde nämlich der Ausfluss, namentlich bei engen Mündungen, nach Ansetzen der langen Röhre ein voller, während er ohne diese Röhre durch keinen Kunstgriff dahin gebracht werden konnte; oder es fiel wenigstens der Ausfluss weit regelmässiger aus als ohne das Eisenrohr, wo, wenn man ja einen vollen Ausfluss erzwungen hatte, derselbe stossweise und in divergenten Fäden erfolgte. Konnte der volle Ausfluss auf keine Weise erlangt werden, so wurde der niedrige Wasserkasten angesetzt und dadurch der Ausfluss unter Wasser bewerkstelligt.

Einige Mal wurden zwei oder alle drei Mundstücke in die Messingröhre eingeschoben, um eine Vervielfältigung der Umstände zu erhalten und das Zusammenwirken solcher Ausflussverhältnisse kennen zu lernen.

Durch diese Versuche erhielt man die, gewissen Wasserständen h_1 und h_2 am Anfang und am Ende der Beobachtung entsprechende Ausflusszeit, und hieraus wieder bei Benutzung der oben angegebenen Formel den Ausflusscoefficienten μ; allein dieser ist noch immer nicht der Contractionscoefficient α, sondern ein Product aus diesem und einem Geschwindigkeitscoefficienten φ. Die Contractionscoefficienten wurden vielmehr durch Messungen der Strahldicken gefunden. Hierzu aber wurde der in Fig. 2 abgebildete Apparat angewendet. AB ist ein vier Centimeter langer hölzerner Ring, welcher so über das äussere Ende der Messingröhre geschoben wird, dass die eine Hälfte der Länge über das Rohrende herausragt; C, C, C, C sind vier kurze Messingschräubchen, womit man diesen Ring auf die Messingröhre befestigt; D, D, D, D sind längere Messingschrauben mit abgerundeten Spitzen, womit der Wasserstrahl E an derjenigen Stelle, wo er am stärksten contrahirt ist, eingefasst wird. Es wurden natürlich die vier längeren Schrauben während des Ausflusses so lange gestellt, bis eine möglichst vollkommene Berührung der Spitzen derselben mit dem Wasserstrahl bemerkbar war, und hierbei wurde man durch den Umstand unterstützt, dass sich auf der Oberfläche des Wasserstrahles sogleich eine Welle zeigte, wenn die Spitze in den Strahl wirklich eindrang.

Bei kleinen Mündungen war der Wasserstrahl sehr klar und ruhig, bei grossen Öffnungen aber, wo das Wasser beinahe mit derselben Geschwindigkeit ankam, mit welcher er ausströmte, war der Strahl trübe und vibrirte nicht unbedeutend; deshalb liess sich dessen Dicke im ersten Falle viel leichter und sicherer messen als im zweiten Falle. Da das Wasser unter abnehmendem Drucke ausfloss, so waren diese Strahlenmessungen sehr umständlich und nicht mit der gewünschten Schärfe durchzuführen, denn es mussten dieselben eigentlich in dem Augenblicke erfolgen, wenn die Druckhöhe für eine bestimmte Ausflussmenge eine mittlere war. Wiewohl bei Ausführung dieser Messungen der sinkende Wasserspiegel von einem Gehilfen beobachtet und dessen Stand von Zeit zu Zeit dem mit der Strahlenmessung beschäftigten Beobachter mitgetheilt wurde, so war es diesem doch nicht immer möglich, in dem Augenblicke das genaue Einstellen der Spitzen zu beendigen, wenn ihm von dem Gehilfen der mittlere Wasserstand annoncirt wurde. Mancher von diesen Versuchen wurde deshalb vergeblich gemacht, oder diente vielmehr nur dazu, die Spitzen vorläufig ungefähr einzustellen.

Hatte man die Spitzen mit der Oberfläche des Wasserstrahles zur Coincidenz gebracht, so nahm man die Vorrichtung vom Messingrohre ab, stellte durch Feilen und Hämmern genau zwischen

den gegenüberstehenden Spitzen passende Sperrmaasse aus breitgeschlagenem Messingdraht her, und maass deren Länge mittels eines genauen Transversalmaassstabes unter der Loupe. Die vier Spitzen gaben schon zwei Werthe des Strahldurchmessers, und da man den Versuch wenigstens ein Mal wiederholte, so bekam man vier Werthe, aus denen der mittlere Werth des Durchmessers von dem contrahirten Wasserstrahl berechnet werden konnte.

Auf diese Weise wurde eine Reihe von Ausfluss- und eine andere von Contractionscoefficienten bei unvollkommener Contraction gefunden, und hierbei beobachtet, dass sich die Glieder beider immer mehr und mehr der Einheit nähern, je grösser der relative Querschnitt der Mündung oder das Verhältniss dieser zum Querschnitt der Röhre oder des ankommenden Wassers ist.

Um nun eine vollständige Vergleichung dieser Erscheinungen der unvollkommenen Contraction mit den Ausfluss- und Contractionsverhältnissen bei vollkommener Contraction zu erzielen, wurden die oben beschriebenen rund ausgedrehten Mundstücke auch noch in die grosse Wandfläche eingesetzt, und die eben angegebenen Versuche wiederholt. Die Fig. 3 auf Taf. I. gibt den Durchschnitt und die äussere Ansicht von der hierbei in Anwendung gekommenen Vorrichtung. *EF* ist das auf die innere Wandfläche aufgenagelte, in der Mitte durchlochte Bretchen mit einem durch kleine Stifte darauf befestigten, die kreisförmige Mündung von 4 Centimeter enthaltenden Messingblech. *AB* ist ein von aussen auf dieses Bretchen aufgenagelter, die Mündung umschliessender Holzring, und *D,D,D,D* sind vier, durch diesen Ring gehende Messingschrauben, von deren Spitzen der Wasserstrahl eingeschlossen wird. Da der äussere Durchmesser der oben erwähnten drei Mundstücke nur 4 Centimeter Durchmesser hatte, so konnten diese Stücke in das Loch *N* des Messingbleches eingesetzt und deshalb auch der Ausfluss durch diese beobachtet, dadurch also auch der Ausfluss- und Contractionscoefficient bei vollkommener Contraction ausgemittelt werden.

Die Versuche über den Ausfluss durch rectanguläre Mündungen wurden in ähnlicher Art wie die über den Ausfluss durch runde Öffnungen, jedoch nicht in dieser grossen Ausdehnung durchgeführt, auch mussten die Strahlmessungen, welche zur Berechnung der Contractionscoefficienten dienen, ihrer Umständlichkeit wegen ganz unterbleiben. Das hierzu gebrauchte parallelepipedische Messingrohr war 32 Centimeter lang und im Lichten 5 Centimeter weit und $2\frac{1}{2}$ Centimeter hoch. Es war ebenfalls mit einem Schieber (s. Fig. 20 Taf. I. der ersten Abtheilung) zum Absperren des Wassers ausgerüstet, wurde übrigens aber genau so in dem Kasten eingesetzt, wie das cylindrische Rohr und wie Fig. 1 dieser Abtheilung vor Augen führt. Anders waren aber die eigentlichen Mundstücke; diese bestanden aus ziemlich 1 Millimeter dicken Messingblechen mit einem rechtwinkelig umgebogenen Rande von 7 Millimeter Breite. (S. Fig. 22 Taf. I. der ersten Abtheilung.)

Zu den Versuchen über den Ausfluss durch kurze Ansatzröhren wurde der in Fig. 1 Taf. I. abgebildete Röhrenapparat ebenfalls angewendet. In die Ausmündung *B* dieser Röhre steckte man nach und nach 5 verschieden weite kurze Ansatzröhren wie *CD* in Fig. 4. Diese Röhren waren von Messing, im Innern glatt ausgeschliffen und hatten circa drei Mal so viel Länge als Weite. Die engste hatte einen lichten Durchmesser von 11 und die weiteste einen von 33 Millimeter. Um diese Röhren beliebig an einander stecken zu können, erhielten sie an ihren Enden dickere Messingringe wie *EF* und *GH*, die noch mit einem schmalen, mit Inselt getünchten Streifen von feinem Papier umgeben wurden, um beim Einsetzen in eine weitere Röhre vollkommen wasserdichten Verschluss zu bewirken.

Endlich wurden auch noch einige Versuche über den Ausfluss durch nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformte Mündungen angestellt. Nachdem es mir schon früher nicht gelungen war, beim Ausfluss des Wassers durch ein dickes, nach innen erweitertes, möglichst abgerundetes und abgeglättetes Mundstück aus hartem Holze den Ausflusscoefficienten über 0,93 zu steigern, so liess ich ein weiteres Mundstück aus mit Zink versetztem Zinn und ein engeres aus Messing anfertigen und durch beide das Wasser unter verschiedenem Drucke ausfliessen, wobei allerdings ein Ausflusscoefficient 0,97 erlangt wurde. Durchschnitte von beiden Mundstücken sind in den Figuren 5 und 6 Taf. I. abgebildet. Das zinnerne Mundstück hatte in der Ausmündung 4 Centimeter Durchmesser, das messingene aber nur 32 Millimeter. Die Erzeugungslinie $ABDE$ der innern Fläche des ersteren Mundstückes bestand aus zwei Kreisbogen und einer kurzen geraden Linie DE; der Radius des kleineren Kreisbogens AB, nämlich $AC = BC$, maass 1 Centimeter, der Radius des grösseren aber $6\frac{1}{2}$ Centimeter. Die Erzeugungslinie AB des kleineren Mundstückes war ein Kreisbogen von 34 Millimeter Halbmesser mit abgerundeten Ecken.

Das grössere conoidische Mundstück wurde auch über die Einmündung CD des Rohres AB (Fig. 1) befestigt, wodurch der Ausfluss für dieses Rohr grösser ausfiel, wie an gehörigem Orte angegeben werden wird.

Wir theilen auch in dieser zweiten Abtheilung sämmtliche Versuche in

Hauptversuche und in

Nebenversuche.

Während zu den Hauptversuchen alle diejenigen Experimente gehören, welche die Erforschung der Gesetze der unvollkommenen Contraction bezweckten, sind zu den Nebenversuchen diejenigen zu rechnen, welche nur in entfernteren Beziehungen zu der unvollkommenen Contraction stehen, wie z. B. die Versuche über den Ausfluss durch innere Ansatzröhren, durch inwendig eingefasste Mündungen und durch conoidische Mundstücke.

I. Hauptversuche.

A. Versuche über die unvollkommene Contraction beim Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand.

1) Ausfluss durch kreisförmige Mündungen.

a) Ausfluss in die freie Luft.

α) Ausmittelung der Correction der Ausflusscoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction.

Mündung No. 1.

Der Durchmesser der ersten oder kleinsten Mündung war $d = 0{,}866$ Centimeter, demnach der Inhalt derselben $a = \left(\frac{0{,}866}{2}\right)^2 \pi = (0{,}433)^2 \pi = 0{,}58901$ Quadratcentimeter.

Eingesetzt in die grosse ebene Wandfläche.

Versuch bei der grösseren Druckhöhe.

Anfängliche Druckhöhe: $h_1 = 0{,}7730$ Meter,
Druckhöhe am Ende: $h_2 = 0{,}3940$ Meter,
mittlere Druckhöhe: $h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2 = 0{,}5677$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 1285$ Secunden,
entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{2A}{a\tau\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = 0{,}19837\,\frac{(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{a\,\tau}$$

$$= \frac{0{,}19837 . 0{,}25151}{0{,}000058901 . 1275} = 0{,}6592.$$

Versuch bei der kleineren Druckhöhe.

Anfängliche Druckhöhe: $h_1 = 0{,}3940$ Meter,
Druckhöhe am Ende: $h_2 = 0{,}1080$ Meter,
entsprechende mittlere Druckhöhe: $h = 0{,}2286$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 1498$ Secunden,

entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu = 0{,}19846 \frac{(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{a\tau} = 0{,}6727.$$

Eingesetzt in die Ausmündung des Messingrohres.

Der Durchmesser des Rohres in der Ausmündung $d = 4{,}032$ Centimeter, daher der Inhalt der Ausmündung

$a_1 = \pi.\ (2{,}016)^2 = 12{,}768$ Quadratcentimeter,

ferner das Verhältniss der Mündung zum Querschnitt des Rohres:

$\frac{a}{a_1} = 0{,}04613$, und das Quadrat desselben:

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}00213.$$

Versuch bei der grösseren Druckhöhe.

Anfängliche Druckhöhe: $h_1 = 0{,}7773$ Meter,
Druckhöhe am Ende: $h_2 = 0{,}3983$ Meter,
entsprechende mittlere Druckhöhe: $h = 0{,}5721$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 1280$ Secunden,
entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu_2 = 0{,}19837.\ \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a\,\tau} = 0{,}6592.$$

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3011.$

Das Messingrohr ohne Mundstück gab die Ausflusszeit $\tau_1 = 48{,}85$ Secunden, daher ist für dieses:

$$\mu_1 = 0{,}19837.\ \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a_1\,\tau_1} = 0{,}7969, \text{ ferner}$$

der Ausdruck $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}5749$, und folglich der dem Durchgang durch diese Röhre entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1{}^2} - 1 = 0{,}5749.$$

Bei eingesetztem Mundstücke fliesst aber das Wasser $\left(\frac{a}{a_1}\right)$ mal so schnell, desshalb ist für diesen Fall der Coefficient des Röhrenwiderstandes nur

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2.\ \zeta = 0{,}00213.\ 0{,}5749 = 0{,}0012.$$

Für den dem Mundstück No. 1 allein zukommenden Ausflusscoefficienten μ ist nun

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu_2{}^2} - \frac{1}{\mu_1{}^2} = \frac{1}{\mu_2{}^2} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta,$$

weshalb endlich der gesuchte Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu_2^2} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{2,3011 - 0,0012}} = \frac{1}{\sqrt{2,2999}}$$
$$= 0,6595$$

folgt.

Versuch bei der mittleren Druckhöhe.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6333$ Meter,
$h_2 = 0,2357$ „
$h = 0,4104$ „
Ausflusszeit: $\tau = 1583$ Secunden,
entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu_2 = 0,19841. \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a\,\tau} = 0,6604,$$

$$\frac{1}{\mu_2^2} = 2,2932;$$ ferner

$$\frac{1}{\mu_2^2} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2,2920,$$ und der dem Mundstück No. 1 allein zukommende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,2910}} = 0,6607.$$

Versuch bei der kleineren Druckhöhe.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3983$ Meter,
$h_2 = 0,1113$ „
$h = 0,2327$ „
Ausflusszeit: $\tau =$ Secunden,
entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu_2 = 0,19846. \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a\,\tau} = 0,6723,$$ und

$$\frac{1}{\mu_2^2} = 2,2125.$$

Beim Ausfluss durch das einfache Messingrohr war die Ausflusszeit $\tau_1 = 58\frac{1}{4}$ Secunden, daher ist für dieses

$$\mu_1 = 0,19846. \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a_1\,\tau_1} = 0,7905,$$ ferner

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0,6005$$ und

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 0,00213.\ 0,6005 = 0,0013.$$

Hiernach folgt der Ausflusscoefficient für die Mündung No. 1 allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,2125 - 0,0013}} = \frac{1}{\sqrt{2,2112}} = 0,6725.$$

Mündung No. 2.

Der Durchmesser dieser war = 1,011 Centimeter, demnach der Inhalt derselben $a = 0{,}80277$ Quadratcentimeter.

Eingesetzt in die grosse ebene Wandfläche.

Versuch bei der grösseren Druckhöhe.

Die Druckhöhen waren: $h_1 = 0{,}7854$ Meter,
$h_2 = 0{,}4036$ „
$h = 0{,}5788$ „
die Ausfluszeit: $\tau = 974$ Secunden,
der entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu = 0{,}19837 \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a\tau} = 0{,}6366.$$

Versuch bei der mittleren Druckhöhe

Hier war: $h_1 = 0{,}6394$ Meter,
$h_2 = 0{,}2414$ „
$h = 0{,}4218$ „
$\tau = 1185$ Secunden,
daher der entsprechende Ausflusscoefficient:
$\mu = 0{,}6431$.

Versuch bei der kleineren Druckhöhe.

Es war: $h_1 = 0{,}4036$ Meter,
$h_2 = 0{,}1144$ „
$h = 0{,}2369$ „
$\tau = 1126$ Secunden,
folglich der Ausflusscoefficient:
$\mu = 0{,}6522$.

Eingesetzt in die Ausmündung des Messingrohres.

Hier ist das Querschnittsverhältniss:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{0{,}80277}{12{,}768} = 0{,}06287, \text{ und } \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}00395.$$

Ausfluss bei grösserer Druckhöhe.

Hier war: $h_1 = 0{,}7780$ Meter, $h_2 = 0{,}3962$ Meter, $h = 0{,}5711$ Meter und $\tau = 973$ Secunden; hieraus folgt der entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu_2 = 0{,}6415 \text{ und } \frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}4298.$$

Nun ist aber $\zeta = 0{,}5749$, daher

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 0{,}0023 \text{ und } \frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2{,}4275.$$

Sonach folgt der der blossen Mündung entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,4275}} = 0,6418.$$

Ausfluss bei mittlerer Druckhöhe.

Die Druckhöhen waren: $h_1 = 0,6320$ Meter, $h_2 = 0,2340$ Meter und $h = 0,4088$ Meter, die Ausflusszeit $\tau = 1190$ Secunden, der entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu_2 = 0,6465, \text{ und } \frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2,3929.$$

Hieraus folgt ferner:

$$\frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2,3929 - 0,0023 = 2,3906,$$

daher der Ausflusscoefficient für die blosse Mündung:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3906}} = 0,6468.$$

Ausfluss bei der kleineren Druckhöhe.

Es war $h_1 = 0,3962$ Meter, $h_2 = 0,1070$ Meter, $h = 0,2288$ Meter und $\tau = 1140$ Secunden. Demnach folgt:

$$\mu_2 = 0,6556; \quad \frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2,3263 \text{ und}$$

$\frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2,3240$; daraus ergibt sich endlich der der blossen Mündung entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3240}} = 0,6560.$$

Mündung No. 3.

Mittlerer Durchmesser dieser Mündung = 1,234 Centimeter, Inhalt derselben: $a = 1,19597$ Quadratcentimeter.

Eingesetzt in die grosse ebene Wandfläche.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7754$, $h_2 = 0,3964$, $h = 0,5704$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 662,8$ Secunden.
Der entsprechende Ausflusscoefficient ist hiernach $\mu = 0,6280$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6317$, $h_2 = 0,2342$, $h = 0,4088$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 817,25$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0,6310$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3964$, $h_2 = 0{,}1102$, $h = 0{,}2312$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 773{,}7$ Secunden.
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6384$.

Sitzend am Ende des mit der conoidischen Einmündung versehenen Messingrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{1{,}19597}{12{,}768} = 0{,}09367$,

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}00877$.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7761$, $h_2 = 0{,}3971$, $h = 0{,}5709$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 650$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0{,}6400$,

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}4412$.

Für das Rohr ohne Mundstück No. 2 wurde die Ausflusszeit $\tau = 42$ Secunden gefunden, weshalb $\mu_1 = 0{,}9278$, ferner

$$\zeta = \frac{1}{\mu_1^{\,2}} - 1 = 0{,}1617,$$

$$\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 0{,}00877 \,.\, 0{,}1617 = 0{,}0015$$

folgt.

Endlich ist $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2{,}4397$ und der in Frage stehende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4397}} = 0{,}6402.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6321$, $h_2 = 0{,}2346$, $h = 0{,}4092$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 804$ Sec.,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0{,}6411$,

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}4329$,

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2{,}4329 - 0{,}0015 = 2{,}4314$.

Ausflusscoefficient für die Mündung No. 3 allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4314}} = 0{,}6413.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3971$, $h_2 = 0{,}1109$, $h = 0{,}2319$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 761$ Secunden,

Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0{,}6479$,

Werth von $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}3819$.

Für das Rohr ohne Mundstück war $\tau = 50$ Sec., weshalb $\mu_1 = 0{,}9237$, $\frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}1719$,

ferner $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 0{,}0015$ und $\frac{1}{\mu_2^2} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \zeta = 2{,}3804$ folgt.

Der entsprechende Ausflusscoefficient für die einfache Mündung No. 3 ist endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3804}} = 0{,}6482.$$

Mündung No. 4.

Mittlerer Durchmesser dieser Mündung = 1,512 Centimeter, folglich Inhalt derselben $a = (0{,}756)^2 . \pi = 1{,}79553$ Quadratcentimeter.

Sitzend in der grossen ebenen Wandfläche.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7777$, $h_2 = 0{,}3992$, $h = 0{,}5728$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 441$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6264$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6344$, $h_2 = 0{,}2366$, $h = 0{,}4115$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 546$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6276$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3992$, $h_2 = 0{,}1124$, $h = 0{,}2338$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 515$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6365$.

Sitzend in dem Ende des einfachen Messingrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{1{,}79553}{12{,}768} = 0{,}14063$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}01978$.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3938$, $h = 0{,}5673$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 438{,}75$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0{,}6327$,

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4976$.

Für das blosse Rohr war $\tau = 48{,}5$ Sec., daher $\mu_1 = 0{,}8050$ und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5433$.

Hiernach folgt $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5433 . 0,01978 = 0,0107$, ferner $\frac{1}{\mu_2{}^2} - \zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 2,4869$, und endlich der Ausflusscoefficient für die einfache Mündung:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,4869}} = 0,6341.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6290$, $h_2 = 0,2312$, $h = 0,4057$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 542,25$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0,6364$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4692$.

Noch ist $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0111$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,4581}} = 0,6378.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3938$, $h_2 = 0,1073$, $h = 0,2281$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 314,75$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0,6441$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4104$.

Die blosse Röhre gab $\tau = 58\frac{1}{2}$ Secunden, weshalb $\mu_1 = 0,7962$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,5815$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0115$ folgt.

Hiernach ist für das blosse Mundstück

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3989}} = 0,6456.$$

Sitzend in dem Ende des Messingrohres mit conoidischer Einmündung.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7693$, $h_2 = 0,3906$, $h = 0,5641$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 440$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0,6331$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4952$.

Das Rohr ohne Mundstück gab $\tau_2 = 43,25$ Secunden, weshalb für dasselbe $\mu_1 = 0,9057$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,2191$ folgt.

Jetzt ergibt sich $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2191 . 0,01978 = 0,0043$, und der gesuchte Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,4909}} = 0,6337.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6263$, $h_2 = 0{,}2278$, $h = 0{,}4024$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 546$ Secunden,

Werthe $\mu_2 = 0{,}6357$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4742$.

Nun ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0047$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4695}} = 0{,}6363.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3906$, $h_2 = 0{,}1038$, $h = 0{,}2243$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 521$ Secunden,

Werthe $\mu_2 = 0{,}6424$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4231$.

Für die Röhre ohne Mundstück ist

$\tau = 52{,}75$ Secunden, $\mu_1 = 0{,}8923$, $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}2560$.

Hiernach folgt $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2560 \cdot 0{,}01978 = 0{,}0050$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4181}} = 0{,}6431.$$

Sitzend in der Ausmündung der an das Messingrohr angesetzten Eisenröhre.

Der Durchmesser in der Mündung dieser Eisenröhre betrug 4,042 Centimeter, folglich war der Inhalt dieser Mündung $= \pi\,(2{,}021)^2 = 12{,}832$ Quadratcentimeter. Hiernach ist

$$\frac{a}{a_1} = \frac{1{,}79553}{12{,}832} = 0{,}13992 \text{ und } \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}01958.$$

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7873$, $h_2 = 0{,}4083$, $h = 0{,}5824$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 434{,}75$ Secunden,

Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0{,}6311$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}5111$.

Für die blosse Eisenröhre war $\tau = 47{,}75$ Secunden; daher $\mu_1 = 0{,}8040$ und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5472$.

Hiernach folgt der Widerstand der Röhrenverbindung: $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5472 \cdot 0{,}01958 = 0{,}0107$,

und der Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}5004}} = 0{,}6324.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6438$, $h_2 = 0{,}2453$, $h = 0{,}4210$ Meter,

$\tau = 537{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6314$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}5086$.

Nun ist $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0108$ zu setzen, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4978}} = 0{,}6327.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4083$, $h_2 = 0{,}1218$, $h = 0{,}2440$ Meter,

$\tau = 501$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6398$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4432$.

Die blosse Röhrenverbindung gab $\tau = 57$ Secunden, daher $\mu_1 = 0{,}7868$, $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}6152$, endlich $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6152 . 0{,}01958 = 0{,}0121$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4311}} = 0{,}6412.$$

Mündung No. 5.

Mittlerer Durchmesser dieser Mündung = 1,742 Centimeter, Inhalt derselben: $a = 2{,}38334$ Quadratcentimeter.

Eingesetzt in die grosse ebene Wandfläche.

Ausfluss bei grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7834$, $h_2 = 0{,}3996$, $h = 0{,}5755$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 337{,}5$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6238$.

Ausfluss bei mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6354$, $h_2 = 0{,}2368$, $h = 0{,}4120$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 412$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6274$.

Ausfluss bei kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3996$, $h_2 = 0{,}1094$, $h = 0{,}2318$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 397{,}5$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}6314$.

Sitzend im Ende des einfachen Messingrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{2{,}38334}{12{,}768} = 0{,}18666$,

quadratisches Verhältniss: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}03484$.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7749$, $h_2 = 0{,}3921$, $h = 0{,}5674$ Meter,
Ausflusszeit: $\tau = 332$ Secunden,
Ausflusscoefficient: $\mu_2 = 0{,}6370$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4641$

Das blosse Rohr gab $\tau = 49{,}75$ Secunden, folglich $\mu_1 = 0{,}7936$ und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5880$.

Hiernach folgt $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5880 . 0{,}03484 = 0{,}0205$, und der dem Mundstück (No. 5) allein zukommende Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4436}} = 0{,}6397.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6279$, $h_2 = 0{,}2297$, $h = 0{,}4043$ Meter, $\tau = 408$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6389$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4495$.

Für das blosse Rohr ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0203$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4292}} = 0{,}6416.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3921$, $h_2 = 0{,}1024$, $h = 0{,}2238$ Meter, $\tau = 395$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6455$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}4002$.

Für das blosse Rohr ist $\tau = 59{,}75$ Secunden, woraus $\mu_1 = 0{,}7965$, $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5761$ und $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0201$ folgt.

Der Ausflusscoefficient ist $\mu = 0{,}6482$.

Sitzend in dem Ende des in der Einmündung conoidisch geformten Messingrohres.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7795$, $h_2 = 0{,}3955$, $h = 0{,}5713$ Meter, $\tau = 326{,}5$, $\mu_2 = 0{,}6472$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}3871$.

Das blosse Rohr gab $\zeta = 0{,}2191$, daher ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2191 . 0{,}03484 = 0{,}0076$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3795}} = 0{,}6483.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6313$, $h_2 = 0{,}2327$, $h = 0{,}4076$ Meter, $\tau = 400\frac{1}{4}$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6489$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}3751$.

Noch ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0083$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3668}} = 0{,}6500.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3955$, $h_2 = 0{,}1053$, $h = 0{,}2272$ Meter, $\tau = 387{,}25$, $\mu_2 = 0{,}6545$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3341$.

Noch ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0089$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3252}} = 0{,}6558.$$

Sitzend im Ende des angeschobenen Eisenrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{2{,}38334}{12{,}832} = 0{,}18573$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}03450$.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7913$, $h_2 = 0{,}4077$, $h = 0{,}5838$ Meter, $\tau = 328$, $\mu_2 = 0{,}6370$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4641$.

Das blosse Rohr gab $\tau = 48{,}25$ Secunden, $\mu_1 = 0{,}8043$ und $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}5457$, daher folgt $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0188$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4453}} = 0{,}6395.$$

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6435$, $h_2 = 0{,}2451$, $h = 0{,}4207$ Meter, $\tau = 400$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6392$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4477$.

Noch ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0197$, daher folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4280}} = 0{,}6418.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4077$, $h_2 = 0{,}1178$, $h = 0{,}2409$ Meter, $\tau = 381\frac{1}{2}$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6446$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4071$.

Die einfache Rohrverbindung gab $\tau = 57{,}75$ Secunden, weshalb $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}5989$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0207$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3864}} = 0{,}6473 \text{ folgt.}$$

Mündung No. 6.

Durchmesser dieser Mündung = 1,967 Centimeter, folglich der Inhalt $a = 3{,}0388$ Quadratcentimeter.

In der grossen ebenen Wandfläche sitzend.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

Hier war: $h_1 = 0{,}7822$, $h_2 = 0{,}3999$, $h = 0{,}5752$ Meter, $\tau = 266$ Secunden, daher $\mu = 0{,}6186$.

Unter mittlerem Drucke.

Es war: $h_1 = 0{,}6354$, $h_2 = 0{,}2372$, $h = 0{,}4122$ Meter, $\tau = 325$ Secunden, folglich $\mu = 0{,}6230$.

Unter kleinerem Drucke.

Es war: $h_1 = 0{,}3999$, $h_2 = 0{,}1097$, $h = 0{,}2321$ Meter, $\tau = 312{,}5$ Secunden, folglich $\mu = 0{,}6293$.

In der Ausmündung des einfachen Messingrohres sitzend.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{3{,}0388}{12{,}768} = 0{,}23800$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}05664$.

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7753$, $h_2 = 0{,}3929$, $h = 0{,}5680$ Meter, $\tau = 258$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6419$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4269$.

Das einfache Rohr gab $\tau = 49\frac{1}{2}$ Secunden, folglich $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}5772$ und $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5772 . 0{,}05664 = 0{,}0327$. Hiernach folgt

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2{,}3942}} = 0{,}6463.$$

Unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6285$, $h_2 = 0{,}2303$, $h = 0{,}4049$ Meter, $\tau = 316\frac{3}{4}$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6450$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4038$.

Noch war $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0330$, daher $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 2{,}3708$ und der gesuchte Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6495$.

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3929$, $h_2 = 0{,}1023$, $h = 0{,}2244$ Meter, $\tau = 305{,}75$, $\mu_2 = 0{,}6541$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3375$.

Für das einfache Rohr war $\tau = 60$ Sec., folglich $\mu_1 = 0{,}7933$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}5892$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0334$, demnach $\mu = 0{,}6588$.

In der Ausmündung der Eisenröhre sitzend.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{3,0388}{12,832} = 0,23681$,

Quadrat: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,05608$.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0,7768$, $h_2 = 0,3945$, $h = 0,5696$ Meter, $\tau = 258\frac{1}{2}$ Secunden, $\mu_2 = 0,6396$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4444$.

Für die Röhre ohne Mundstück (No. 6) war $\tau = 54\frac{3}{4}$ Secunden, weshalb $\mu_1 = 0,7217$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,9198$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0516$ folgt. Hiernach ist der Ausflusscoefficient

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2,3928}} = 0,6465.$$

Mittlere Druckhöhe.

$h_1 = 0,6299$, $h_2 = 0,2318$, $h = 0,4065$ Meter, $\tau = 316$ Secunden, $\mu_2 = 0,6451$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4029$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0515$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3514}} = 0,6521.$$

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0,3945$, $h_2 = 0,1045$, $h = 0,2262$ Meter, ferner $\tau = 306$ Secunden, $\mu_2 = 0,6506$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,3624$.

Für die blosse Röhrenverbindung ist $\tau = 65\frac{1}{4}$ Sec., daher $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,9154$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0513$; endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3,3111}} = 0,6578.$$

Mundstück No. 7.

Durchmesser dieser Mündung = 2,117 Centimeter,
Inhalt derselben $a = 3,5199$ Quadratcentimeter.

In der grossen ebenen Wandfläche befindlich.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7857$, $h_2 = 0,4040$, $h = 0,5792$ Meter, Ausflusszeit: $\tau = 230,75$ Sec., entsprechender Ausflusscoefficient: $\mu = 0,6125$.

Unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6397$, $h_2 = 0,2417$, $h = 0,4170$ Meter, Ausflusszeit: $\tau = 282$ Sec., entsprechender Ausflusscoefficient: $\mu = 0,6160$.

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4040$, $h_2 = 0,1147$, $h = 0,2373$ Meter, Ausflusszeit: $\tau = 269,5$ Sec., entsprechender Ausflusscoefficient: $\mu = 0,6212$.

In der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}27568$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}07600$.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7774$, $h_2 = 0{,}3957$, $h = 0{,}5706$ Met.

Ausflusszeit: $\tau = 222$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6414$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4308$.

Noch ist $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0439$, daher bleibt für das blosse Mundstück der Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3869}} = 0{,}6473.$$

Unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6314$, $h_2 = 0{,}2334$, $h = 0{,}4082$ Met., $\tau = 272{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6444$. $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4083$.

Nun ist $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0443$, daher folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3640}} = 0{,}6504.$$

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3957$, $h_2 = 0{,}1064$, $h = 0{,}2281$ Met., $\tau = 262{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6505$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3630$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0448$, folglich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3182}} = 0{,}6568.$$

Mundstück No. 8.

Durchmesser der Mündung = 2,348 Centimeter, Inhalt derselben = 4,3300 Quadratcentimeter.

Sitzend in der grossen ebenen Wandfläche.

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7838$, $h_2 = 0{,}4018$, $h = 0{,}5770$ Met., $\tau = 190$ Sec., entsprechender Werth $\mu = 0{,}6063$.

Unter mittlerem Drucke.

$h_1 = 0{,}6374$, $h_2 = 0{,}2392$, $h = 0{,}4144$ Met., $\tau = 232{,}5$ Sec., $\mu = 0{,}6096$.

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}4018$, $h_2 = 0{,}1120$, $h = 0{,}2345$ Met., $\tau = 223$ Sec., $\mu = 0{,}6150$.

Sitzend in der Ausmündung des Messingrohres.

Verhältniss $\frac{a}{a_1} = \frac{4,3300}{12,768} = 0,33913.$

Quadrat: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,11501.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7788$ Met., $h_2 = 0,3969$, $h = 0,5719$ Met., $\tau = 180,25$ Sec., $\mu_2 = 0,6418$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4279.$

Noch ist der Widerstand für die Röhre $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0664$, daher ist der Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3615}} = 0,6507.$$

Unter mittlerem Drucke.

$h_1 = 0,6324$, $h_2 = 0,2343$, $h = 0,4091$ Meter, $\tau = 221$ Secunden, $\mu_2 = 0,6453$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4018$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0671$; daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3347}} = 0,6545.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,3969$, $h_2 = 0,1071$, $h = 0,2291$ Meter, ferner $\tau = 212,25$ Sec., $\mu_2 = 0,6538$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,3397$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0678$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,2719}} = 0,6635.$$

Mundstück No. 9.

Durchmesser der Mündung = 2,490 Centimeter.
Inhalt derselben: $a = 4,8695$ Quadratcentimeter.

Befindlich in der grossen ebenen Wand.

Grössere Druckhöhe.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7727$, $h_2 = 0,3937$, $h = 0,5674$ Meter, $\tau = 165\frac{1}{2}$ Sec. Hieraus folgt $\mu = 0,6192$.

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0,3937$, $h_2 = 0,1077$, $h = 0,2283$ Meter, $\tau = 196$ Secunden, demnach $\mu = 0,6223$.

Befindlich in der Ausmündung des Messingrohres mit conoidischer Einmündung.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{4,8695}{12,768} = 0,38139.$

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,14545.$

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7773$, $h_2 = 0{,}3980$, $h = 0{,}5721$ Meter, $\tau = 152$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6715$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}2179$.

Das Rohr ohne Mundstück gab $\tau = 42$ Sec., woraus $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 1{,}1641$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1641 \cdot 0{,}14545 = 0{,}0239$ folgen, so wie $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 2{,}1940$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1940}} = 0{,}6751.$$

Unter mittlerem Drucke.

$h_1 = 0{,}6333$, $h_2 = 0{,}2357$, $h = 0{,}4104$ Meter, $\tau = 187{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6744$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}1990$.

Ohne Mundstück war $\tau = 52$ Secunden, deshalb $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 1{,}1628$, und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0237$; es folgt nun

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1753}} = 0{,}6780.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3983$, $h_2 = 0{,}1113$, $h = 0{,}2327$ Meter, $\tau = 176{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6869$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}1191$.

Für die Röhre ohne Mundstück wurde $\tau = 49{,}35$ gefunden, weshalb $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 1{,}1389$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0202$ folgt. Der Ausflusscoefficient für das Mundstück No. 9 ist hiernach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}0989}} = 0{,}6902.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7773$, $h_2 = 0{,}3980$, $h = 0{,}5721$ Meter, $\tau = 154$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6628$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}2766$.

Nun ist für das Rohr $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0840$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1926}} = 0{,}6753.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3983$, $h_2 = 0{,}1113$, $h = 0{,}2327$ Meter, $\tau = 181$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6699$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 2{,}2285$.

Noch ist anderen Versuchen zufolge $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0857$, daher folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1428}} = 0{,}6831.$$

Befindlich in der Ausmündung der angeschobenen Eisenröhre.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{4{,}8695}{12{,}832} = 0{,}37949$,

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}14401$.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7878$, $h_2 = 0{,}4088$, $h = 0{,}5829$ Meter, ferner $\tau = 153{,}5$, $\mu_2 = 0{,}6587$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3045$.

Für die Röhre allein ist $\tau = 47{,}5$ Sec., daher $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0767$, demnach für das Mundstück No. 9

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}2278}} = 0{,}6700.$$

Unter mittlerem Drucke.

$h_1 = 0{,}6438$, $h_2 = 0{,}2463$, $h = 0{,}4216$ Meter, $\tau = 188$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6634$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2722$.

Noch ist der Widerstand für die blosse Röhre $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0786$, daher $\frac{1}{\mu_2{}^2} - \zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 2{,}1936$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1936}} = 0{,}6748.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}4088$, $h_2 = 0{,}1221$, $h = 0{,}2445$ Meter, $\tau = 175{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6733$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2057$.

Aus der Ausflusszeit $\tau = 56$ Sec. folgt für die Röhre allein $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0806$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1251}} = 0{,}6860.$$

Mundstück No. 10.

Durchmesser der Mündung = 2,666 Centimeter, Inhalt derselben $a = 5{,}5823$ Quadratcentimeter.

Befindlich in der grossen ebenen Wandfläche.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0,7754$, $h_2 = 0,3964$, $h = 0,5702$ Meter, $\tau = 144,65$ Secunden, hieraus folgt $\mu = 0,6166$.

Mittlere Druckhöhe.

$h_1 = 0,6314$, $h_2 = 0,2339$, $h = 0,4085$ Meter, $\tau = 178,25$ Sec., deshalb $\mu = 0,6201$.

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0,3964$, $h_2 = 0,1102$, $h = 0,2311$ Meter, $\tau = 170,35$ Sec., daher $\mu = 0,6212$.

Befindlich im Messingrohr mit conoidischer Einmündung.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{5,5823}{12,768} = 0,43727$.

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,19115$.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0,7761$, $h_2 = 0,3971$, $h = 0,5709$ Meter, $\tau = 130$ Sec., $\mu_2 = 0,6856$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1274$.

Für die Röhre ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1617.\ 0,19115 = 0,03098$, daher folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0964}} = 0,6907.$$

Mittlere Druckhöhe.

$h_1 = 0,6321$, $h_2 = 0,2346$, $h = 0,4092$ Meter, $\tau = 161$ Sec., $\mu_2 = 0,6859$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1254$.

Ferner $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0319$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0935}} = 0,6911.$$

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0,3971$, $h_2 = 0,1109$, $h = 0,2319$ Meter, $\mu = 151,5$ Sec., $\mu_2 = 0,6973$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,0566$.

Ferner $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1719.\ 0,19115 = 0,0329$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0237}} = 0,7028.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0,7793$, $h_2 = 0,4003$, $h = 0,5742$ Meter, $\tau = 133,25$ Sec., $\mu_2 = 0,6670$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,2480$.

Für das Rohr allein war $\tau = 48$ Secunden, weshalb $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5260$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5260 . 0{,}19115 = 0{,}1006$, und endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1474}} = 0{,}6824.$$

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}4003$, $h_2 = 0{,}1138$, $h = 0{,}2352$ Meter, $\tau = 155$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6775$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}1789$.

Für das Rohr allein war $\tau = 57$ Sec., daher $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5415$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5415 . 0{,}19115 = 0{,}1035$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}0754}} = 0{,}6941.$$

Mundstück No. 11.

Durchmesser der Mündung = 2,878 Centimeter, Inhalt derselben $a = 6{,}5054$ Quadratcentimeter.

In der grossen ebenen Wandfläche befindlich.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

$h_1 = 0{,}7785$, $h_2 = 0{,}3995$, $h = 0{,}5733$ Meter, $\tau = 123{,}25$ Sec., deshalb $\mu = 0{,}6192$.

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3995$, $h_2 = 0{,}1130$, $h = 0{,}2344$ Meter, $\tau = 144{,}5$ Sec., daher $\mu = 0{,}6247$.

In der Ausmündung des Messingrohres mit conoidischer Einmündung.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = \frac{6{,}5054}{12{,}768} = 0{,}50950$,

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}25959$.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

$h_1 = 0{,}7693$, $h_2 = 0{,}3906$, $h = 0{,}5641$ Meter, $\tau = 111{,}9$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6871$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}1184$.

Der Widerstand der Röhre ist $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2191 . 0{,}2596 = 0{,}0569$, daher $\frac{1}{\mu_2^2} - \zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 2{,}0615$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}0615}} = 0{,}6965.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3906$, $h_2 = 0{,}1038$, $h = 0{,}2243$ Meter, $\tau = 133{,}1$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6941$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}0759$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2561 . 0{,}2596 = 0{,}0665$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}0094}} = 0{,}7054.$$

In der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Grösserer Druck.

$h_1 = 0,7723$, $h_2 = 0,3938$, $h = 0,5673$ Meter, $\tau = 113,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,6766$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1844$.

Das einfache Rohr gab $\tau = 48\frac{1}{2}$ Sec., weshalb $\zeta = \frac{1}{\mu_1{}^2} - 1 = 0,5433$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1410$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0434}} = 0,6996.$$

Kleinerer Druck.

$h_1 = 0,3938$, $h_2 = 0,1073$, $h = 0,2281$ Meter, $\tau = 133,75$ Secunden, $\mu_2 = 0,6842$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1361$.

Für die blosse Röhre: $\tau = 58\frac{1}{2}$ Sec., daher $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5815 . 0,2596 = 0,1509$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,9852}} = 0,7097.$$

In der Ausmündung der Eisenröhre sitzend.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{6,5054}{12,832} = 0,50696$.

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,25701$.

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

$h_1 = 0,7873$, $h_2 = 0,4083$, $h = 0,5824$ Meter, $\tau = 111,75$ Secunden, $\mu_2 = 0,6776$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1779$.

Ferner ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5472 . 0,25701 = 0,1406$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0373}} = 0,7006.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,4083$, $h_2 = 0,1218$, $h = 0,2440$ Meter, $\tau = 130$ Secunden, $\mu_2 = 0,6805$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1593$.

Hiervon $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6152 . 0,257 = 0,1581$ abgezogen folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,0012}} = 0,7069.$$

Mündung No. 12.

Durchmesser dieser Mündung = 3,075 Centimeter,
Inhalt derselben $a = 7{,}4264$ Quadratcentimeter.

Befindlich in der grossen ebenen Wandfläche.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}7836$, $h_2 = 0{,}4001$, $h = 0{,}5759$ Meter, $\tau = 110$ Secunden, $\mu = 0{,}6136$.

Mittlere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}6357$, $h_2 = 0{,}2374$, $h = 0{,}4125$ Meter, $\tau = 134$ Secunden, $\mu = 0{,}6182$.

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}4001$, $h_2 = 0{,}1104$, $h = 0{,}2327$ Meter, $\tau = 129{,}25$ Secunden, $\mu = 0{,}6208$.

Befindlich in der Ausmündung des mit einer conoidischen Einmündung ausgerüsteten Messingrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{7{,}4264}{12{,}768} = 0{,}58164$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}33831$.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7782$, $h_2 = 0{,}3942$, $h = 0{,}5700$ Meter, $\tau = 95{,}9$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7084$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}9930$.

Das blosse Rohr gab $\tau = 43\frac{1}{2}$ Sec., weshalb $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}2121$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2121 \cdot 0{,}3383 = 0{,}0717$, endlich aber

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}9213}} = 0{,}7215.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3942$, $h_2 = 0{,}1042$, $h = 0{,}2259$ Meter, $\tau = 113{,}6$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7176$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}9418$.

Die blosse Röhre gab $\tau = 52{,}75$ Sec., weshalb $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}2376$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2376 \cdot 0{,}3383 = 0{,}0804$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}8614}} = 0{,}7330.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7749$, $h_2 = 0{,}3921$, $h = 0{,}5674$ Meter, $\tau = 99$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6858$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}1274$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}588 . 0{,}3383 = 0{,}1989$, folglich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}9285}} = 0{,}7201.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3921$, $h_2 = 0{,}1024$, $h = 0{,}2238$ Meter, $\tau = 118$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6934$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}0845$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}576 . 0{,}3383 = 0{,}1949$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}8896}} = 0{,}7275.$$

Befindlich in der Ausmündung der Eisenröhre.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{7{,}4264}{12{,}832} = 0{,}57874.$

Quadrat: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}33494.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7913$, $h_2 = 0{,}4077$, $h = 0{,}5838$ Meter, $\tau = 97\frac{1}{4}$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6878$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}1140$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5457 . 0{,}3349 = 0{,}1828$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}9312}} = 0{,}7196.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}4077$, $h_2 = 0{,}1178$, $h = 0{,}2409$ Meter, $\tau = 113\frac{1}{2}$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6954$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}0681$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5989 . 0{,}3349 = 0{,}2006$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}8675}} = 0{,}7318.$$

Mündung No. 13.

Durchmesser dieser Mündung = 3,2535 Centimeter, Inhalt derselben $a = 8{,}3137$ Quadratcentimeter.

Dieses und die folgenden Mundstücke wurden nicht in die grosse ebene Wandfläche eingesetzt, weil sie wegen ihrer schmalen Stirnflächen nicht die erforderliche Genauigkeit versprachen. Dagegen wurden mit anderen Mündungen der grossen dünnen Wand Versuche angestellt, deren Resultate nun dazu benutzt werden können, um durch Interpolation die in Frage stehenden Ausflusscoefficienten zu bestimmen.

Für die Weite der Mündung von 3,075 Centimeter haben wir gefunden:

bei grösserem Drucke $\mu = 0,6136$,

bei kleinerem Drucke $\mu = 0,6208$;

weiter unten aber wird angegeben, dass bei der Mündung von 3,965 Centimeter Durchmesser

unter grösserem Drucke $\mu = 0,6078$ und

unter kleinerem Drucke $\mu = 0,6187$

sich ergeben hat. Nun war aber die Weite der Mündung No. 13 = 3,2535 Centimeter, deshalb ist nach den Regeln der Interpolation für diese Mündung der Ausflusscoefficient bei grösserem Drucke:

$$\mu = 0,6136 - (0,6136 - 0,6078) . \frac{3,2535 - 3,075}{3,965 - 3,075} = 0,6136 - 0,0058 . \frac{0,1785}{0,890}$$
$$= 0,6136 - 0,0012 = 0,6124,$$

und bei kleinerem Drucke:

$$\mu = 0,6208 - (0,6208 - 0,6187) . \frac{1785}{8900} = 0,6208 - 0,0021 . 0,2 = 0,6204.$$

Befindlich in dem Messingrohre mit conoidischer Einmündung.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{8,3137}{12,768} = 0,65113$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,42397$.

Ausfliessend unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7773$, $h_2 = 0,3980$, $h = 0,5721$ Meter, $t = 81,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,7358$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1,8471$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1641 . 0,424 = 0,0696$, demnach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,7775}} = 0,7501.$$

Unter mittlerem Drucke.

$h_1 = 0,6333$, $h_2 = 0,2357$, $h = 0,4104$ Meter, $t = 100,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,7388$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1,8322$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,0690$, daher

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,7632}} = 0,7531.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,3983$, $h_2 = 0,1113$, $h = 0,2327$ Meter, $t = 94$ Secunden, $\mu_2 = 0,7555$, $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1,7520$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1389 . 0,424 = 0,0589$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6931}} = 0,7685.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3933$, $h = 0{,}5670$ Meter, $\tau = 85$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7065$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}0035$.

Für die blosse Röhre $\tau = 49$ Sec., weshalb $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5704$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5704 . 0{,}422 = 0{,}2418$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}7617}} = 0{,}7534.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3933$, $h_2 = 0{,}1068$, $h = 0{,}2275$ Meter, $\tau = 98$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7316$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}8683$.

Für das blosse Rohr $\tau = 58\frac{1}{2}$ Sec., daher $\zeta = 0{,}5702$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2418$ und

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}6265}} = 0{,}7841.$$

Befindlich in der Ausmündung der Eisenröhre.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{8{,}3137}{12{,}832} = 0{,}64788$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}41975$.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7878$, $h_2 = 0{,}4088$, $h = 0{,}5807$ Meter, $\tau = 84$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}6984$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 2{,}0115$.

Das Rohr allein: $\tau = 47{,}5$ Sec., daher $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5324$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5324 . 0{,}41975 = 0{,}2235$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}7880}} = 0{,}7479.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}4088$, $h_2 = 0{,}1221$, $h = 0{,}2445$ Meter, $\tau = 96\frac{3}{4}$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7154$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}9539$.

Das blosse Rohr $\tau = 56$ Sec., $\frac{1}{\mu_1^2} = 1{,}5595$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5595 . 0{,}41975 = 0{,}2348$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}7191}} = 0{,}7627.$$

Mündung No. 14.

Durchmesser dieser Mündung = 3,403 Centimeter, Inhalt derselben $a = 9{,}0952$ Quadratcentimeter.

Auch dieses Mundstück konnte nicht in die grosse ebene Wand eingesetzt werden, weshalb die dieser entsprechenden Ausflusscoefficienten ebenfalls durch Interpolation zu finden sind. Den oben befolgten Weg auch hier einschlagend, erhalten wir für den grösseren Druck

$$\mu = 0,6136 - 0,0058 . \frac{3,403 - 3,075}{3,965 - 3,075} = 0,6136 - 0,0021 = 0,6115,$$

für den kleineren Druck aber

$$\mu = 0,6208 - 0,0021 . \frac{328}{890} = 0,6208 - 0,0008 = 0,6200.$$

Befindlich in der Ausmündung des conoidisch einmündenden Messingrohres.

$$\text{Querschnittsverhältniss: } \frac{a}{a_1} = \frac{9,0952}{12,768} = 0,71235,$$

$$\text{Quadrat desselben: } \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,50744.$$

Unter grösserem Drucke ausfliessend.

$h_1 = 0,7761$, $h_2 = 0,3971$, $h = 0,5709$ Meter, $\tau = 73$ Secunden, $\mu_2 = 0,7494$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,7808$.

Widerstand des Rohres $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1617 . 0,50744 = 0,0820$, demnach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6988}} = 0,7672.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,3971$, $h_2 = 0,1109$, $h = 0,2319$ Meter, $\tau = 84,75$ Secunden, $\mu_2 = 0,7631$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,7085$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,1719 . 0,5074 = 0,0872$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6213}} = 0,7854.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7793$, $h_2 = 0,4003$, $h = 0,5732$ Meter, $\tau = 76,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,7154$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,9541$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5260 . 0,5074 = 0,2669$, folglich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6872}} = 0,7699.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,4003$, $h_2 = 0,1138$, $h = 0,2352$ Meter, $\tau = 89,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,7221$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,9178$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5415 . 0,5074 = 0,2748$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6430}} = 0,7838.$$

Befindlich in der Ausmündung der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{9,0952}{12,832} = 0,70879$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,50239$.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7881$, $h_2 = 0,4091$, $h = 0,5832$ Meter, $\tau = 75,75$, $\mu_2 = 0,7145$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,9589$.

Das blosse Rohr gab $\tau = 47,75$ Sec., demnach $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,54941$ und $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2760$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6829}} = 0,7708.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,4091$, $h_2 = 0,1229$, $h = 0,2451$ Meter, $\tau = 87,75$ Secunden, $\mu_2 = 0,7188$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,9357$.

Für das blosse Rohr $\tau = 56\frac{3}{4}$ Sec., $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,6115$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,3072$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,6285}} = 0,7836.$$

Mundstück No. 15.

Durchmesser dieser Mündung = 3,596 Centimeter, Inhalt derselben $a = 10,1561$ Quadratcentimeter.

Durch Interpolation ergibt sich für die grosse ebene Wand unter grösserem Drucke:

$$\mu = 0,6136 - 0,0058 . \frac{3,596 - 3,075}{0,890} = 0,6136 - 0,0058 . \frac{521}{890} = 0,6136 - 0,0034$$
$$= 0,6102,$$

unter kleinerem Drucke aber

$$\mu = 0,6208 - 0,0021 . \frac{521}{890} = 0,6208 - 0,0011 = 0,6197.$$

Befindlich in der Ausmündung des conoidisch einmündenden Messingrohres.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{10,1561}{12,768} = 0,79544$.

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,63272$.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7693$, $h_2 = 0,3906$, $h = 0,5641$ Meter, $\tau = 63,6$ Secunden, $\mu_2 = 0,7743$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,6679$.

Das blosse Rohr gab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2191 \,.\, 0{,}6327 = 0{,}1386$, daher folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}5293}} = 0{,}8086.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3906$, $h_2 = 0{,}1038$, $h = 0{,}2243$ Meter, $\tau = 75{,}9$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7796$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}6454$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2560 \,.\, 0{,}6327 = 0{,}1620$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}4834}} = 0{,}8211.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3938$, $h = 0{,}5673$ Meter, $\tau = 67{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7271$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}8914$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5433 \,.\, 0{,}6327 = 0{,}3437$; endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}5477}} = 0{,}8038.$$

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}3938$, $h_2 = 0{,}1073$, $h = 0{,}2281$ Meter, $\tau = 79$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7403$. $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}8248$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5815 \,.\, 0{,}6327 = 0{,}3679$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}4569}} = 0{,}8285.$$

Befindlich in der Ausmündung des Eisenrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{10{,}1561}{12{,}832} = 0{,}79147$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}62642$.

Grössere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}7873$, $h_2 = 0{,}4083$, $h = 0{,}5824$ Meter, $\tau = 66{,}75$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7266$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}8939$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5472 \,.\, 0{,}6264 = 0{,}3428$, demnach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}5511}} = 0{,}8029.$$

Kleinere Druckhöhe.

$h_1 = 0{,}4083$, $h_2 = 0{,}1218$, $h = 0{,}2440$ Meter, $\tau = 77\frac{3}{4}$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7288$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}8826$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6152 \,.\, 0{,}6264 = 0{,}3856$, endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}4970}} = 0{,}8173.$$

Mündung No. 16.

Durchmesser dieser Mündung = 3,683 Centimeter, Inhalt derselben $a = 10,6535$ Quadratcentimeter.

Durch Interpolation ergibt sich für diese Mündung, wenn sie sich in der grossen ebenen Wandfläche befände, bei grösserem Drucke:

$$\mu = 0,6136 - 0,0058.\frac{3,683 - 3,075}{0,890} = 0,6136 - 0,0058.\frac{608}{890} = 0,6136 - 0,0039 = 0,6097,$$

bei kleinerem Drucke:

$$\mu = 0,6208 - 0,0021.\frac{608}{890} = 0,6208 - 0,0014 = 0,6194.$$

Befindlich in der Ausmündung des in den Kasten sich conoidisch einmündenden Messingrohres.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{10,6535}{12,768} = 0,83439.$

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,69621.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7782$, $h_2 = 0,3942$, $h = 0,5700$ Meter, $\tau = 60$ Secunden, $\mu_2 = 0,7892$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,6054$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2121.\ 0,6962 = 0,1476$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,4578}} = 0,8282.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,3942$, $h_2 = 0,1042$, $h = 0,2259$ Meter, $\tau = 70,5$ Secunden, $\mu_2 = 0,8061$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,5390$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2376.\ 0,6962 = 0,1654$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3736}} = 0,8532.$$

Befindlich in der Ausmündung des einfachen Messingrohres.

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7749$, $h_2 = 0,3921$, $h = 0,5674$ Meter, $\tau = 64,5$ Secunden, $\mu_2 = 0,7336$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,8583$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,588.\ 0,6962 = 0,4093$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,4490}} = 0,8307.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,3921$, $h_2 = 0,1024$, $h = 0,2238$ Meter, $\tau = 76,5$ Secunden, $\mu_2 = 0,7456$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,7988$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,576.\ 0,6962 = 0,4011$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3977}} = 0,8458.$$

Befindlich in der Ausmündung der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt: $\left(\frac{a}{a_1}\right) = \frac{10,6535}{12,832} = 0,83023,$

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,68928.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7913$, $h_2 = 0,4077$, $h = 0,5838$ Meter, $t = 63,5$ Secunden, $\mu_2 = 0,7336$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1,8453$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5457 . 0,6893 = 0,3761$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,4692}} = 0,8250.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0,4077$, $h_2 = 0,1178$, $h = 0,2409$ Meter, $t = 73,25$ Secunden, $\mu_2 = 0,7510$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1,7731$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5989 . 0,689 = 0,4128$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3603}} = 0,8574.$$

Mündung No. 17.

Durchmesser dieser Mündung = 3,748 Centimeter, Inhalt derselben $a = 11,0329$ Quadratcentimeter.

Für den Fall, dass sich diese Mündung in der grossen ebenen Wandfläche befindet, ist bei grösserem Drucke zu setzen:

$$\mu = 0,6136 - 0,0058 . \frac{3,748 - 3,075}{0,890} = 0,6136 - 0,0043 = 0,6093,$$

bei kleinerem Drucke:

$$\mu = 0,6208 = 0,0021 . \frac{673}{890} = 0,6208 - 0,0016 = 0,6192.$$

Befindlich in der Ausmündung des Messingrohres.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{11,0329}{12,768} = 0,86410,$

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,74668.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0,7753$, $h_2 = 0,3929$, $h = 0,5680$ Meter, $t = 60,5$ Secunden, $\mu_2 = 0,7540$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1,7592$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5772 . 0,7467 = 0,4310$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3282}} = 0,8677.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3929$, $h_2 = 0{,}1023$, $h = 0{,}2244$ Meter, $\tau = 71\frac{3}{4}$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7677$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}6968$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5892.\ 0{,}7467 = 0{,}4399$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}2569}} = 0{,}8920.$$

Eingesetzt in die Ausmündung der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{11{,}033}{12{,}832} = 0{,}85980.$

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}73925.$

Unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7768$, $h_2 = 0{,}3945$, $h = 0{,}5696$ Meter, $\tau = 64$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7115$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}9751$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}9198.\ 0{,}73925 = 0{,}6799$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}2952}} = 0{,}8787.$$

Unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3945$, $h_2 = 0{,}1045$, $h = 0{,}2262$ Meter, $\tau = 76{,}5$ Secunden, $\mu_2 = 0{,}7168$,

$\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}9463$, $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}9154.\ 0{,}73925 = 0{,}6767$,

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}2696}} = 0{,}8875.$$

Mündung No. 18.

Eine Mündung im dünnen Blech, beinahe gleichkommend der Ausmündung des Messingrohres, hatte die Weite 3,965 Centimeter, folglich den Inhalt $a = 12{,}347$ Quadratcentimeter.

Diese Mündung, eingesetzt in die grosse ebene Wandfläche, gab Folgendes:

Beim Ausfluss unter grösserem Drucke.

$h_1 = 0{,}7727$, $h_2 = 0{,}3937$, $h = 0{,}5674$ Meter, $\tau = 66{,}5$ Secunden, $\mu = 0{,}6078$. (Versuche im vorigen Jahre gaben $\mu = 0{,}6077$.)

Beim Ausfluss unter kleinerem Drucke.

$h_1 = 0{,}3937$, $h_2 = 0{,}1077$, $h = 0{,}2283$ Meter, $\tau = 77{,}75$ Secunden, $\mu = 0{,}6187$.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind zunächst, insofern sie zur Bestimmung der Abhängigkeit der Ausflusscoefficienten μ von dem relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1}$ der Mündung dienen sollen, in folgender Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle I.

Die, kreisförmigen Mündungen in der dünnen Wand entsprechenden und durch Versuche gefundenen Ausflusscoefficienten für die unvollkommene Contraction und für den Ausfluss in die freie Luft.

Nummer der Mündung.	Durchmesser in Centimetern.	Absoluter Querschnitt in Quadratcentimetern a.	Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1}$.	Ausflusscoefficienten: bei vollkommener Contraction μ.	Ausflusscoefficienten: bei unvollkommener Contraction $\mu_{\frac{a}{a_1}}$.	Relative Abweichung der Ausflusscoefficienten $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$
1	0,866	0,5890	——	0,6659	——	——
〃	〃	〃	0,0461	——	0,6660	0,0000
2	1,011	0,8028	——	0,6440	——	——
〃	〃	〃	0,0629	——	0,6482	0,0065
3	1,234	1,1960	——	0,6325	——	——
〃	〃	〃	0,0937	——	0,6432	0,0169
4	1,512	1,7955	——	0,6300	——	——
〃	〃	〃	0,1406	——	0,6392	0,0146
〃	〃	〃	〃	——	0,6377	0,0122
〃	〃	〃	0,1399	——	0,6354	0,0086
5	1,742	2,3833	——	0,6275	——	——
〃	〃	〃	0,1867	——	0,6432	0,0250
〃	〃	〃	〃	——	0,6514	0,0381
〃	〃	〃	0,1857	——	0,6429	0,0246
6	1,967	3,0388	——	0,6236	——	——
〃	〃	〃	0,2380	——	0,6449	0,0341
〃	〃	〃	0,2368	——	0,6521	0,0457
7	2,117	3,5199	——	0,6166	——	——
〃	〃	〃	0,2757	——	0,6515	0,0566
8	2,348	4,3300	——	0,6103	——	——
〃	〃	〃	0,3391	——	0,6562	0,0752
9	2,490	4,8695	——	0,6207	——	——
〃	〃	〃	0,3814	——	0,6826	0,0997
〃	〃	〃	〃	——	0,6792	0,0942
〃	〃	〃	0,3795	——	0,6780	0,0923
10	2,666	5,5823	——	0,6193	——	——
〃	〃	〃	0,4373	——	0,6949	0,1221
〃	〃	〃	〃	——	0,6883	0,1114
11	2,878	6,5054	——	0,6220	——	——
〃	〃	〃	0,5095	——	0,7010	0,1270
〃	〃	〃	〃	——	0,7046	0,1328
〃	〃	〃	0,5070	——	0,7038	0,1315
12	3,075	7,4264	——	0,6172	——	——
〃	〃	〃	0,5816	——	0,7272	0,1782
〃	〃	〃	〃	——	0,7238	0,1726
〃	〃	〃	0,5787	——	0,7257	0,1758
13	3,2535	8,3137	——	0,6164	——	——
〃	〃	〃	0,6511	——	0,7593	0,2318
〃	〃	〃	〃	——	0,7687	0,2471
〃	〃	〃	0,6479	——	0,7553	0,2253

Nummer der Mündung.	Durchmesser in Centimetern.	Absoluter Querschnitt in Quadratcentimetern a.	Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1}$.	Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction μ.	Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction $\mu_{\frac{a}{a_1}}$.	Relative Abweichung der Ausflusscoefficienten $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$.
14	3,403	9,0952	——	0,6157	——	——
"	"	"	0,7123	——	0,7763	0,2608
"	"	"	"	——	0,7768	0,2617
"	"	"	0,7088	——	0,7772	0,2623
15	3,596	10,1561	——	0,6150	——	——
"	"	"	0,7954	——	0,8147	0,3247
"	"	"	"	——	0,8162	0,3271
"	"	"	0,7915	——	0,8101	0,3172
16	3,683	10,6535	——	0,6145	——	——
"	"	"	0,8344	——	0,8407	0,3681
"	"	"	"	——	0,8383	0,3642
"	"	"	0,8302	——	0,8412	0,3689
17	3,748	11,0329	——	0,6142	——	——
"	"	"	0,8641	——	0,8798	0,4324
"	"	"	0,8598	——	0,8831	0,4378
18	3,965	12,347	——	0,6132	——	——
19	4,032	12,768	1,0000	——	1,0000	0,6308

Die Bedeutung der Werthe in den ersten vier Vertikalcolumnen ist für sich und aus dem Vorhergehenden klar. Die Zahlen in der fünften Columne sind die arithmetischen Mittel aus den einerlei Mündung, aber zwei bis drei verschiedenen Druckhöhen entsprechenden Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction oder unendlich kleinem Verhältniss zwischen dem Querschnitt der Mündung und dem der Wandfläche, worin dieselbe sich befindet. Für die Mündung No. 1 wurden diese Coefficienten 0,6592 und 0,6727 gefunden, deshalb ist in der Tabelle der Werth $\mu = \frac{0,6592 + 0,6727}{2}$ $= 0,6659$ aufgeführt. Bei der Mündung No. 2 sind für μ die Werthe 0,6366, 0,6431, 0,6522 gefunden, deshalb enthält die Tabelle den Werth

$$\mu = \frac{0,6366 + 0,6431 + 0,6522}{3} = 0,6440.$$

Auf dieselbe Weise sind auch die übrigen Mittel bestimmt worden.

Die sechste Vertikalcolumne gibt die mittleren Werthe der Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction oder für eine Reihe von Werthen der Querschnittsverhältnisse, wie sie durch Einsetzen der Mundstücke in das Ende eines einfachen oder mit einer conoidischen Einmündung ausgerüsteten Messingrohres oder in das einer langen Eisenröhre gefunden worden sind. Es wurde für die Mündung No. 1 bei grösserer Druckhöhe $\mu_{\frac{a}{a_1}} = 0,6595$ und bei kleinerer $= 0,6725$ gefunden, daher ist das Mittel $= \frac{0,6595 + 0,6725}{2} = 0,6660$ in der sechsten Columne aufgeführt. Ebenso hat sich für die Mündung No. 2 im Messingrohre $\mu = 0,6418$, 0,6465 oder 0,6468 ergeben, deshalb

ist in der sechsten Columne der Tabelle das Mittel $\frac{0,6418 + 0,6468 + 0,6560}{3} = 0,6482$ zu finden.

In der siebenten Columne sind die Verhältnisse angegeben, in welchen die Differenzen zwischen den Ausflusscoefficienten $\mu_{\frac{a}{a_1}}$ bei unvollkommener Contraction und denen (μ) bei vollkommener Contraction zu letzteren stehen. Man sieht, dass dieselben mit dem relativen Querschnitte der Ausflussmündung und zwar von Null bis 0,6308 wachsen, wenn der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction $\mu = 0,6132$ ist. Das Gesetz dieses Wachsens ist uns allerdings nicht bekannt, und dem jetzigen Zustande der Theorie zufolge auch nicht möglich, *a priori* auszumitteln, doch können wir uns im Voraus davon überzeugen, dass dieses Wachsen keineswegs gleichmässig mit $\left(\frac{a}{a_1}\right)$ erfolgt. Am deutlichsten wird aber die Abhängigkeit zwischen $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ und $\left(\frac{a}{a_1}\right)$ durch die Curven und die zwischen denselben befindlichen numerirten Punkte No. 1, 2, 3 .... 38 auf Taf. II. vor Augen geführt. Die Coordinaten dieser Punkte repräsentiren die Querschnittsverhältnisse $\frac{a}{a_1}$ und die entsprechenden Werthe von $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$. Zur leichten Uebersicht hat man das Ganze mit einem aus Horizontallinien und Vertikallinien bestehenden Netze überzogen, dessen einer Eckpunkt A als Anfangspunkt des ganzen Coordinatensystems anzusehen ist. Von diesem Punkte aus sind auf der horizontalen Linie AC die Abscissen $x = \frac{a}{a_1}$ und auf der vertikalen Linie AD die Ordinaten $y = \frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ abzunehmen. Wenn nun z. B. dem Punkte No. 20 die Abscisse 0,5095 und die Ordinate 0,1328 zukommen, so wird dadurch angegeben, dass dem Querschnittsverhältnisse $x = \frac{a}{a_1} = 0,5095$ der Werth $y = \frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0,1328$, oder der Ausflusscoefficient $\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\,(1 + 0,1328) = 1,1328.\,\mu$ zukommt. Dem Endpunkte B des ganzen Systemes entsprechen natürlich die Coordinatenwerthe $x = \frac{a}{a_1} = 1$ und $y = \frac{1 - \mu}{\mu} = 0,6308$.

Von den verschiedenen Linien und Curven, wodurch sich die Endpunkte A und B mit einander verbinden lassen, weicht, wie der blosse Anblick zeigt, die Gerade AEB fast am meisten ab; es ist deshalb nicht anzunehmen, dass sich die Abhängigkeit zwischen $\frac{a}{a_1}$ und $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ durch die Gleichung $y = Ax$ oder $y = 0,6308\,x$ darstellen lasse. Weit näher liegt diesen Punkten die Parabel AGB, deren Axe die Seite AD und Gleichung die Formel $y = Bx^2$ oder $y = 0,6308\,x^2$ ist; man kann daher annähernd das gesetzmässige Wachsen der Werthe von $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ durch die Gleichung

der Parabel ausdrücken. Die Werthe von $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ fallen dagegen alle zu klein aus, wenn man sie als Variable der Gleichung $y = Cx^3$ oder $y = 0{,}6308\, x^3$ d. i. als Ordinaten der Curve AHB ansieht.

Um nun eine an den numerirten Punkten näher vorbei gehende Curve zu erhalten, und durch die Gleichung dieser die Abhängigkeit zwischen $\frac{a}{a_1}$ und $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ genauer auszudrücken, setzen wir zunächst

$y = Ax + Bx^2$, oder da $x = 1$, $y = 0{,}6308$ gibt, also $0{,}6308 = A + B$ ist,

$$0{,}6308\, x - y = B\,(x - x^2).$$

Der mittlere Werth von B bestimmt sich nun durch die Summation aller Werthe von x, x^2 und y, indem man

$0{,}6308\, \Sigma\,(x) - \Sigma\,(y) = B\,[\Sigma\,(x) - \Sigma\,(y)]$, folglich

$$B = \frac{0{,}6308\, \Sigma\,(x) - \Sigma\,(y)}{\Sigma\,(x) - \Sigma\,(x^2)} \text{ setzt.}$$

Die Summe aller Werthe von x ist: $\Sigma\,(x) = 18{,}246$, ferner die Summe aller Quadrate von x, oder $\Sigma\,(x^2) = 11{,}3313$, und die Summe aller Werthe von y, oder $\Sigma\,(y) = 6{,}2251$, daher folgt

$$B = \frac{0{,}6308 .\ 18{,}246 - 6{,}2251}{18{,}2460 - 11{,}3313} = \frac{11{,}5096 - 6{,}2251}{6{,}9147} = \frac{5{,}2845}{6{,}9147} = 0{,}7642, \text{ und}$$

$$A = 0{,}6308 - 0{,}7642 = -\,0{,}1334.$$

Hiernach wäre nun

$y = -\,0{,}1334\, x + 0{,}7642\, x^2$ zu setzen.

Da diese Gleichung für Werthe von x unter $\frac{0{,}1334}{0{,}7642} = 0{,}1744$ negative y gibt, und keinesweges anzunehmen ist, dass der Ausflusscoefficient $\mu_{\frac{a}{a_1}}$ kleiner sein könne als μ, so möchte sich der Gebrauch dieser Gleichung nicht rechtfertigen.

Setzen wir dagegen $y = Ax + Cx^3$, oder, da $0{,}6308\, x = Ax + Cx$ ist,

$0{,}6308\, x - y = C\,(x - x^3)$, bestimmen wir folglich den Coefficienten C durch die Formel

$$C = \frac{0{,}6308\, \Sigma\,(x) - \Sigma\,(y)}{\Sigma\,(x) - \Sigma\,(x^3)}.$$

Hierin sind die Summenwerthe $\Sigma\,(x)$ und $\Sigma\,(y)$ die obigen, dagegen hat man für die Summe der Cuben oder $\Sigma\,(x^3)$ die Zahl 7,8513 einzusetzen, weshalb nun folgt

$$C = \frac{5{,}2845}{18{,}2460 - 7{,}8513} = \frac{5{,}2845}{10{,}3947} = 0{,}5084, \text{ und}$$

$$A = 0{,}6308 - 0{,}5084 = 0{,}1224.$$

Diesem nach würde sich die Abhängigkeit zwischen $\frac{a}{a_1}$ und $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ durch die Gleichung

$$y = 0{,}1224\, x + 0{,}5084\, x^3 \text{ oder } \frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0{,}1224 \left(\frac{a}{a_1}\right) + 0{,}5084 \left(\frac{a}{a_1}\right)^3$$

ausdrücken lassen, und der Auflusscoefficient für die kreisförmige Mündung vom relativen Querschnitte $\frac{a}{a_1}$ sein:

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\left(1 + 0{,}1224\left(\frac{a}{a_1}\right) + 0{,}5084\left(\frac{a}{a_1}\right)^3\right).$$

Die dieser Gleichung entsprechende Curve wird durch den Zug AIB repräsentirt; sie weicht im Ganzen nicht sehr von den den Beobachtungen entsprechenden Punkten ab; doch sind in der ersten Hälfte die Ordinaten der Punkte meistens grösser und in der zweiten Hälfte grösstentheils kleiner als die der gefundenen Curve.

Untersuchen wir nun, wie sich die der Gleichung $y = Bx^2 + Cx^3$ entsprechende Curve an das Punktsystem anschliesst. Beim Zugrundelegen dieser Gleichung hat man

$$C = \frac{0{,}6308\ \Sigma(x^2) - \Sigma(y)}{\Sigma(x^2) - \Sigma(x^3)}$$ zu setzen.

Nun ist aber $\Sigma(x^2) = 11{,}3313$, $\Sigma(x^3) = 7{,}8513$ und $\Sigma(y) = 6{,}2251$, daher folgt denn

$$C = \frac{0{,}6308.\ 11{,}3313 - 6{,}2251}{11{,}3313 - 7{,}8513} = 0{,}2651 \text{ und}$$

$$B = 0{,}6308 - 0{,}2651 = 0{,}3657.$$

Die gesuchte Gleichung wird hiernach $y = 0{,}3657\ x^2 + 0{,}2651\ x^3$. Die entsprechende Curve ist nicht auf der Figurentafel zu finden; sie weicht noch mehr ab von dem Punktsystem als die zuletzt gefundene, geht anfangs nahe unter dieser hin, schneidet dieselbe bei $x = 0{,}495$ und läuft von da nahe über dieser Curve hin.

Wie stimmt aber die Gleichung $x^2 = Ay + By^2$, welche einer Ellipse oder Hyperbel mit der Axenrichtung AD angehört?

Man hat zugleich $1 = 0{,}6308\ A + (0{,}6308)^2\ B$; es lassen sich daher aus $\Sigma(x^2) = A\Sigma(y) + B\Sigma(y^2)$ und der letzten Gleichung die Constanten A und B finden; es folgt nämlich

$$B = \frac{0{,}6308\ \Sigma(x^2) - \Sigma(y)}{0{,}6308\ \Sigma(y^2) - (0{,}6308)^2\ \Sigma(y)} = \frac{0{,}9227}{0{,}6308\ \Sigma(y^2) - 0{,}3979\ \Sigma(y)};$$

aber $\Sigma(y)$ ist $= 6{,}2251$ und $\Sigma(y^2) = 1{,}6707$, demnach

$$B = \frac{0{,}9227}{1{,}0539 - 2{,}4770} = -0{,}6483, \text{ und}$$

$$A = \frac{1 + 0{,}6483.\ 0{,}3979}{0{,}6308} = 1{,}9942.$$

Hiernach ist die in Frage befindliche Gleichung folgende:

$x^2 = 1{,}9942.\ y - 0{,}6483.\ y^2$, und es ergibt sich umgekehrt

$y^2 - 3{,}076\ y = -1{,}542\ x^2$ oder

$y = 1{,}538 - \sqrt{2{,}365 - 1{,}542\ x^2}$.

Diese Gleichung gibt für $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ für y die Werthe 0,033, 0,130, 0,315; untersucht man die entsprechende Curve etwas näher, so zeigt sich, dass dieselbe der zuletzt gefundenen Curve sehr nahe kommt, dass sie ebenfalls anfänglich unter der Curve AIB hingeht, und später nahe über derselben hin sich erstreckt; es ist deshalb auch dieselbe nicht in das Figurennetz eingezeichnet worden.

Prüfen wir nun die Curve mit der Gleichung $y = A x^m$, bei welcher A und m noch auszumittelnde Erfahrungswerthe sind.

Da $x = 1$, $y = 0,6308$ geben soll, so können wir $A = 0,6308$ und $y = 0,6308\ x^m$ setzen, weshalb also nur noch der Exponent m zu bestimmen übrig bleibt. Dieser Exponent ergibt sich aus zwei Werthen x und y einer Beobachtung durch die Formel

$$m = \frac{\text{Log } y - \text{Log } 0,6308}{\text{Log } x}.$$

Wir haben seither die mittleren Werthe der Constanten unter der Voraussetzung gefunden, dass die Ordinaten ebenso leicht einen positiven als einen ebenso grossen negativen Fehler enthalten; der Einfachheit wegen wollen wir aber jetzt den mittleren Werth von m dadurch ermitteln, dass wir voraussetzen, es sei in jedem durch Beobachtungen gefundenen Werthe von m ein positiver Fehler ebenso wahrscheinlich als ein gleich grosser negativer Fehler. Aus diesem Grunde setzen wir denn

$$m = \frac{1}{N} \Sigma \left(\frac{\text{Log } y - \text{Log } 0,6308}{\text{Log } x}\right),$$ wobei N die Zahl der Beobachtungen angibt.

Lassen wir die erste Beobachtung, weil sie $y = 0$ gibt, ausser Acht, so behalten wir $N = 37$. Die den übrigen Beobachtungen entsprechenden Werthe von m sind aber folgende:

1,654	1,822	2,316	2,593
1,529	1,871	2,308	2,550
1,920	1,967	2,332	2,901
2,011	1,914	2,391	2,869
2,184	1,973	2,335	2,940
1,923	1,984	2,333	2,975
1,673	1,985	2,184	3,034
1,927	2,096	2,372	2,883
2,033	2,377	2,603	2,585
			2,418.

Die Summe dieser, zum Theil sehr von einander abweichenden Werthe ist 83,765; es folgt demnach der mittlere Werth

$$m = \frac{83,765}{37} = 2,2639.$$

Die gesuchte Gleichung ist daher

$$y = 0,6308 .\ x^{2,2639}.$$

Die Abweichungen der einzelnen Werthe von m deuten schon darauf hin, dass ein nahes Anschliessen der hiernach construirten Curve an das den Beobachtungen entsprechende Punktsystem nicht zu erwarten ist; setzen wir aber noch

$x = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, so erhalten wir

$y = 0,0273$, $0,1184$ und $0,3289$,

und es ist nun leicht zu überblicken, dass diese Curve noch mehr von den Beobachtungen abweicht als die letzte.

Versuchen wir nun die Gleichung $y = A\ (a^x - 1)$, und mitteln wir die Constanten A und a derselben aus.

Da $x = 0$, $a^x = 1$ und $y = 0$ gibt, so entspricht diese Gleichung dem Anfangspunkte. Nun soll aber $x = 1$, $y = 0{,}6308$ geben, daher haben wir $0{,}6308 = A\,(a - 1)$ und es folgt nun

$$y = 0{,}6308 . \frac{a^x - 1}{a - 1}.$$

Jetzt kommt es darauf an, die Grundzahl a aus den Beobachtungen abzuleiten. Wir können der Figur zufolge erwarten, dass $x = \frac{1}{2}$ für y ungefähr 0,125 geben müsse; setzen wir deshalb diesen Werth ein, so bekommen wir $0{,}125 = 0{,}6308 \frac{\sqrt{a} - 1}{a - 1}$, oder $0{,}6308 \sqrt{a} - 0{,}125\, a = 0{,}5058$. Die Auflösung der letzten Gleichung gibt $a = (4{,}04)^2 = 16{,}32$, wofür wir vorläufig den Werth 16 annehmen wollen, um die Näherungsformel

$y = 0{,}0421\,(16^x - 1)$ zu erhalten.

Hiernach ist für $x = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$

$y = 0{,}0421,\ 0{,}1263,\ 0{,}2947,\ 0{,}6315,$

und es ist nun leicht wahrzunehmen, dass diese Coordinaten einer Curve entsprechen, welche sich schon ziemlich genau an die gegebenen Punkte anschliesst.

Um nun die schärferen Werthe der Constanten A und a zu finden, möge folgender Weg eingeschlagen werden.

Aus $y = A\,(a^x - 1)$ oder $\frac{y}{A} = a^x - 1$ folgt durch Differenziiren in Hinsicht auf A und a:

$-\frac{y\,dA}{A^2} = x .\ a^{x-1} .\ da$, daher

$$\frac{dA}{da} = - A^2 \frac{x .\ a^{x-1}}{y} \text{ oder}$$

$$\frac{dA}{da} = -(0{,}0421)^2 \frac{x .\ 16^{x-1}}{y} = -0{,}0017724 \frac{x}{y} .\ 16^{x-1}.$$

Der mittlere Werth dieses Differenzialverhältnisses ist

$$\frac{dA}{da} = -0{,}0017724\, \Sigma \left(\frac{x .\ 16^{x-1}}{y}\right).$$

Die Versuche geben aber folgende Werthe für $\frac{x .\ 16^{x-1}}{y}$:

0,715	0,790	0,736	1,056	1,389
0,447	0,844	0,752	1,024	1,379
0,889	0,624	0,825	1,068	1,400
1,064	0,654	1,030	1,002	1,432
1,499	0,714	0,971	1,083	1,447
0,783	0,688	0,983	1,230	1,407
0,514	0,728	1,023	1,220	1,371
			1,205	1,331

und die Summe aller dieser Zahlen ist 37,117; daher folgt der mittlere Werth derselben $= \frac{37{,}117}{37}$ $= 1{,}003$, und endlich

$$\frac{dA}{da} = -0{,}0017724 .\ 1{,}003 = -0{,}0017787.$$

Nun ist aber

$$0{,}6308 = (A + dA)\,(a + da - 1)$$

zu setzen, daher folgt dann

$$0{,}6308 = (0{,}0421 - 0{,}001778\ da)\,(16 + da - 1) \text{ oder}$$
$$0{,}6308 = (0{,}0421 - 0{,}001778\ da)\,(15 + da),$$

weshalb sich die nöthige Correction für die Basis a:

$$da = \frac{0{,}6308 - 0{,}0421.\ 15}{0{,}04210 - 0{,}02667} = -\frac{0{,}0007}{0{,}01543} = -0{,}0454$$

und die für den Coefficienten A:

$$dA = 0{,}001778.\ 0{,}0454 = 0{,}0000807$$

ergibt. Hiernach folgt die corrigirte Basis $a + da = 15{,}9546$ und der verbesserte Coefficient $A + dA = 0{,}04291$; endlich die vollständige Gleichung

$$y = 0{,}0422.\ (15{,}9546^x - 1).$$

Unter der Voraussetzung, dass es gleich wahrscheinlich ist, gleichgrosse positive und negative Fehler in y begangen zu haben, kann man auf folgendem Wege zu genaueren Werthen von A und a gelangen. Setzt man

$$y = (A + dA)\left((a + da)^x - 1\right)$$
$$= (A + dA)\,(a^x + xa^{x-1}.\ da - 1)$$
$$= A\,(a^x - 1) + Axa^{x-1}.\ da + (a^x - 1)\,dA,$$

so erhält man folgende Gleichung für die gleichzeitigen Correctionen von A und a:

$$\left(\Sigma\,(a^x) - N\right) dA + \frac{A}{a}.\ \Sigma\,(xa^x).\ da = \Sigma\,(y) - A\left(\Sigma\,(a^x) - N\right);$$

und hiermit die Gleichung

$$0{,}6308 = (A + dA)\,(a + da - 1) \text{ oder}$$
$$(a - 1)\,dA + Ada = 0{,}6308 - A\,(a - 1) \text{ verbunden,}$$

gelangt man endlich zu den gesuchten Correctionen dA und da.

Setzt man $a = 15{,}9546$, so erhält man folgende Werthe von $a^x - 1$:

0,190	0,672	1,861	4,005	8,053
0,296	0,933	2,358	3,965	8,053
0,476	0,927	2,358	5,070	7,956
0,476	1,145	3,101	5,070	9,086
0,473	1,558	3,101	5,017	9,086
0,677	1,873	3,073	6,192	8,969
0,677	1,873	4,005	6,192	9,950
			6,122	9.820

und es ist die Summe derselben oder

$$\Sigma\,(a^x - 1) = \Sigma\,(a^x) - N = 144{,}72.$$

Dagegen findet man für $x . a^x$ folgende Werthe:

0,075	0,311	1,086	2,911	7,201
0,121	0,460	1,468	2,873	7,201
0,208	0,456	1,468	3,952	7,088
0,208	0,591	2,089	3,952	8,415
0,206	0,867	2,089	3,898	8,415
0,313	1,096	2,065	5,123	8,276
0,313	1,096	2,911	5,123	9,462
			5,048	9,303;

und es ist die Summe dieser Werthe oder

$$\Sigma(xa^x) = 117{,}74.$$

Setzen wir noch $A = 0{,}0422$, und $\Sigma(y)$, wie oben, $= 6{,}2251$, so erhalten wir folgende zwei Gleichungen für die Correctionen oder Differenzen:

$$144{,}72 . dA + 0{,}31145 . da = 0{,}1179 \text{ und}$$
$$14{,}9546 . dA + 0{,}0422\, da = -0{,}0003.$$

Hieraus folgen allerdings die bedeutend abweichenden Werthe

$$da = -1{,}246 \text{ und}$$
$$dA = 0{,}0035, \text{ und es ist sonach}$$
$$y = 0{,}0457\,(14{,}709^x - 1) \text{ zu setzen.}$$

Diese Gleichung gibt für $x = 1$, $y = 0{,}6226$, also noch den Fehler $0{,}6308 - 0{,}6226 = 0{,}0082$; führen wir deshalb mit den Werthen $a = 14{,}709$ und $A = 0{,}0457$ die letzte Rechnung noch einmal durch, indem wir die beobachteten Werthe von x und y in die letzte Gleichung einsetzen. Dadurch bekommen wir für alle 38 Beobachtungen $\Sigma(a^x - 1) = 135{,}54$ und $\Sigma(xa^x) = 111{,}13$, und es stellen sich nun folgende zwei Gleichungen heraus:

$$135{,}54 . dA + 0{,}34581 . da = 0{,}0308,$$
$$13{,}709 . dA + 0{,}0457 . da = 0{,}0043.$$

Aus ihnen folgt $da = 0{,}1118$, demnach der corrigirte Werth $a = 14{,}821$ und $dA = -0{,}000057$, daher der corrigirte Werth $A = 0{,}04564$. Die gesuchte Gleichung ist endlich

$$y = 0{,}04564\,(14{,}821^x - 1).$$

Die dieser Gleichung entsprechende Curve schliesst sich von allen bis jetzt gefundenen am schärfsten an die Beobachtungen an; man überzeugt sich hiervon vorzüglich auch durch folgende, die Abweichungen oder Fehler und deren Quadrate enthaltende Tabelle.

Tabelle II.

x.	Log x.	Log y.	y beobachtet.	y berechnet.	Fehler.	Fehlerquadrate.	
0,0461	0,66370 — 2	———	0,0000	0,0060	— 0,0060	0,0000360	
0,0629	0,79865 — 2	0,81291 — 3	0,0065	0,0084	— 0,0019	0,0000036	
0,0937	0,97174 — 2	0,22789 — 2	0,0169	0,0131	+ 0,0038	0,0000144	
0,1406	0,14799 — 1	0,16435 — 2	0,0146	0,0210	— 0,0064	0,0000410	
0,1406	0,14799 — 1	0,08636 — 2	0,0122	0,0210	— 0,0088	0,0000774	
0,1399	0,14582 — 1	0,93450 — 3	0,0086	0,0209	— 0,0123	0,0001513	
0,1867	0,27114 — 1	0,39794 — 2	0,0250	0,0299	— 0,0049	0,0000240	
0,1867	0,27114 — 1	0,58092 — 2	0,0381	0,0299	+ 0,0082	0,0000672	
0,1857	0,26881 — 1	0,39094 — 2	0,0246	0,0296	— 0,0050	0,0000250	
0,2380	0,37658 — 1	0,53275 — 2	0,0341	0,0411	— 0,0070	0,0000490	
0,2368	0,37438 — 1	0,65992 — 2	0,0457	0,0408	+ 0,0049	0,0000240	
0,2757	0,44044 — 1	0,75282 — 2	0,0566	0,0503	+ 0,0063	0,0000397	
0,3391	0,53033 — 1	0,87622 — 2	0,0752	0,0682	+ 0,0070	0,0000490	
0,3814	0,58138 — 1	0,99870 — 2	0,0997	0,0820	+ 0,0177	0,0003133	
0,3814	0,58138 — 1	0,97405 — 2	0,0942	0,0820	+ 0,0122	0,0001488	
0,3795	0,57921 — 1	0,96520 — 2	0,0923	0,0813	+ 0,0110	0,0001210	
0,4373	0,64078 — 1	0,08672 — 1	0,1221	0,1027	+ 0,0194	0,0003764	
0,4373	0,64078 — 1	0,04688 — 1	0,1114	0,1027	+ 0,0087	0,0000757	
0,5095	0,70714 — 1	0,10380 — 1	0,1270	0,1346	— 0,0076	0,0000578	
0,5095	0,70714 — 1	0,12320 — 1	0,1328	0,1346	— 0,0018	0,0000032	
0,5070	0,70501 — 1	0,11893 — 1	0,1315	0,1334	— 0,0019	0,0000036	
0,5816	0,76462 — 1	0,25091 — 1	0,1782	0,1733	+ 0,0049	0,0000240	
0,5816	0,76462 — 1	0,23704 — 1	0,1726	0,1733	— 0,0007	0,0000005	
0,5787	0,76245 — 1	0,24502 — 1	0,1758	0,1716	+ 0,0042	0,0000176	
0,6511	0,81365 — 1	0,36511 — 1	0,2318	0,2184	+ 0,0134	0,0001796	
0,6511	0,81365 — 1	0,39287 — 1	0,2471	0,2184	+ 0,0287	0,0008237	
0,6479	0,81151 — 1	0,35276 — 1	0,2253	0,2162	+ 0,0091	0,0000828	
0,7123	0,85266 — 1	0,41631 — 1	0,2608	0,2658	— 0,0050	0,0000250	
0,7123	0,85266 — 1	0,41780 — 1	0,2617	0,2658	— 0,0041	0,0000168	
0,7088	0,85052 — 1	0,41880 — 1	0,2623	0,2629	— 0,0006	0,0000004	
0,7954	0,90059 — 1	0,51148 — 1	0,3247	0,3440	— 0,0193	0,0003725	
0,7954	0,90059 — 1	0,51468 — 1	0,3271	0,3440	— 0,0169	0,0002856	
0,7915	0,89845 — 1	0,50133 — 1	0,3172	0,3399	— 0,0227	0,0005153	
0,8344	0,92137 — 1	0,56597 — 1	0,3681	0,3872	— 0,0191	0,0003648	
0,8344	0,92137 — 1	0,56134 — 1	0,3642	0,3872	— 0,0230	0,0005290	
0,8302	0,91918 — 1	0,56691 — 1	0,3689	0,3823	— 0,0134	0,0001796	
0,8641	0,93656 — 1	0,63589 — 1	0,4324	0,4234	+ 0,0090	0,0000810	
0,8598	0,93440 — 1	0,64128 — 1	0,4378	0,4179	+ 0,0199	0,0003960	
18,2461	0,16975 — 15	0,431051 — 37	6,2251	6,2251	0,0000	0,0055956	Summen.

Da die Summe der in der fünften Columne enthaltenen, nach obiger Formel berechneten Werthe von y der Summe der in der vierten Columne zusammengestellten beobachteten Werthe gleich ist, also die Summe der positiven Fehler gleich ist der der negativen, wie auch die Summe (0) der sechsten Columne ausweist, so sind die gefundenen Constanten diejenigen, welche bei Zugrundelegung der Formel $y = A\,(a^x - 1)$ die grösste Genauigkeit gewähren.

Die Methode der kleinsten Quadrate gibt den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung:

$$F = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{N - n}},$$

wo $\Sigma(\Delta^2)$ die Summe der Fehlerquadrate, N die Zahl der Beobachtungen und n die Zahl der ausgemittelten Constanten bezeichnet. Wir erhalten deshalb

$$F = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}0055956}{38 - 2}} = \pm\, 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}0055956}{36}} = \pm\, 0{,}0084,$$

d. i. noch lange nicht ein Procent.

Die nach der gefundenen Gleichung construirte Curve ist in der Figur *AKB*; sie zieht sich, wie man sieht, so zwischen den Punkten der Beobachtung hindurch, dass die Summen der Abweichungen auf beiden Seiten gleich gross ausfallen.

Um in Fällen der Anwendung der Berechnung des Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction nach der Formel

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0{,}04564\left((14{,}821)^{\frac{a}{a_1}} - 1\right) \text{ oder}$$

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\left[1 + 0{,}04564\left((14{,}821)^{\frac{a}{a_1}} - 1\right)\right]$$

überhoben zu sein, sind für $x = \frac{a}{a_1}$ die Werthe 0,01, 0,02, 0,03 u. s. w. bis 1,00 angenommen, die entsprechenden Werthe von $y = 0{,}04564\left((14{,}821)^x - 1\right)$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle III.

Die nach der Formel $y = 0{,}04564\left((14{,}821)^x - 1\right)$ berechneten Correctionen der Ausflusscoefficienten für unvollkommene Contraction.

Hunderttel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,014	0,033	0,057	0,088	0,130	0,184	0,256	0,349	0,471
1	0,001	0,016	0,035	0,060	0,092	0,135	0,191	0,264	0,360	0,485
2	0,002	0,017	0,037	0,062	0,096	0,140	0,197	0,272	0,371	0,500
3	0,004	0,019	0,039	0,065	0,100	0,145	0,204	0,281	0,382	0,515
4	0,005	0,021	0,041	0,068	0,104	0,130	0,211	0,290	0,394	0,530
5	0,007	0,023	0,044	0,072	0,108	0,155	0,218	0,300	0,406	0,546
6	0,008	0,025	0,046	0,075	0,112	0,161	0,225	0,309	0,418	0,562
7	0,009	0,027	0,049	0,078	0,116	0,166	0,232	0,318	0,431	0,578
8	0,011	0,029	0,051	0,081	0,121	0,172	0,240	0,328	0,444	0,595
9	0,012	0,031	0,054	0,085	0,125	0,178	0,248	0,338	0,457	0,613

Diese Tabelle setzt voraus, dass der relative Querschnitt $x = \frac{a}{a_1}$ der Ausmündung nur in zwei Decimalen, in Zehnteln und Hunderteln gegeben ist. Um nun den einem solchen Querschnitte

entsprechenden Werth von y zu finden, suche man in der ersten Horizontalcolumne die Zehntel und in der ersten Vertikalcolumne die Hundertel auf, und gehe von der ersten Stelle vertikal herab und von der zweiten horizontal herüber bis zum Begegnen beider Wege: die an dieser Stelle stehende Ziffer gibt y oder die gesuchte Correction von μ an. Ist z. B. der Inhalt einer Ausflussöffnung 51 Quadratcentimeter und die Wandfläche, worin sich dieselbe befindet, 150 Quadratcentimeter, hat die Mündung den relativen Querschnitt $x = \frac{a}{a_1} = \frac{51}{150} = 0{,}34$; mithin ist in der ersten Horizontalreihe die Zahl 3 und in der ersten Vertikalreihe die Zahl 4 aufzusuchen, und von 3 aus herunter so wie von 4 so weit herüber zu gehen, bis beide Bewegungen zusammenkommen. Die an dieser Stelle stehende Ziffer ist 0,068; daher auch der Ausflusscoefficient um 6,8 Procent grösser als bei vollkommener Contraction oder unendlich grosser Wandfläche. Wäre nun der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction $= 0{,}610$, so würde er hier $= 0{,}610 . 1{,}068 = 0{,}647$ betragen.

Wäre der Werth $x = \frac{a}{a_1}$ in drei Decimalen ausgedrückt, so müsste man aus den benachbarten Werthen von x und y den entsprechenden Werth von y durch Interpolation finden. Z. B. $x = 0{,}713$ gäbe, da für $x = 0{,}71$, $y = 0{,}264$ und für $x = 0{,}72$, $y = 0{,}272$ ist, $y = 0{,}264 + 0{,}3 . (0{,}272 - 0{,}264) = 0{,}266$.

In den seither versuchten Ausdrücken kamen nur zwei Constanten vor; prüfen wir deshalb noch ein Paar Formeln mit drei Constanten und nehmen wir zunächst den einfachen Ausdruck

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3$$

vor. Da für $x = 1$, $y = 0{,}6308$ wird, so hat man noch $0{,}6308 = A + B + C$, und daher auch folgende Formel mit nur zwei Constanten:

$$y = 0{,}6308\,x + B\,(x^2 - x) + C\,(x^3 - x).$$

Setzen wir $0{,}6308\,x - y = z$, $x - x^2 = u$ und $x - x^3 = v$, so erhält man der Methode der kleinsten Quadrate zufolge die Constanten B und C durch die Formeln

$$B = \frac{\Sigma\,(v^2)\,\Sigma\,(uz) - \Sigma\,(uv)\,\Sigma\,(vz)}{\Sigma\,(u^2)\,\Sigma\,(v^2) - \Sigma\,(uv)\,\Sigma\,(uv)} \text{ und}$$

$$C = \frac{\Sigma\,(u^2)\,\Sigma\,(vz) - \Sigma\,(uv)\,\Sigma\,(uz)}{\Sigma\,(u^2)\,\Sigma\,(v^2) - \Sigma\,(uv)\,\Sigma\,(uv)}.$$

Die in diesen Formeln vorkommenden Summen ergeben sich mittels folgender tabellarisch zusammengestellten Rechnung.

Tabelle IV.

x.	x^2.	x^3.	u.	v.	z.	u^2.	v^2.	uv.	uz.	vz.
0,0461	0,0021	0,0001	0,0440	0,0460	0,0291	0,00194	0,00212	0,00202	0,00128	0,00134
0,0629	0,0040	0,0002	0,0589	0,0627	0,0332	0,00347	0,00393	0,00369	0,00195	0,00208
0,0937	0,0088	0,0008	0,0849	0,0929	0,0422	0,00721	0,00863	0,00789	0,00358	0,00392
0,1406	0,0198	0,0028	0,1208	0,1378	0,0741	0,01459	0,01899	0,01665	0,00895	0,01021
0,1406	0,0198	0,0028	0,1208	0,1378	0,0765	0,01459	0,01899	0,01665	0,00924	0,01054
0,1399	0,0196	0,0027	0,1203	0,1372	0,0796	0,01447	0,01882	0,01651	0,00958	0,01092
0,1867	0,0348	0,0065	0,1519	0,1802	0,0928	0,02307	0,03247	0,02737	0,01410	0,01672
0,1867	0,0348	0,0065	0,1519	0,1802	0,0797	0,02307	0,03247	0,02737	0,01211	0,01436
0,1857	0,0345	0,0064	0,1512	0,1793	0,0925	0,02286	0,03215	0,02711	0,01399	0,01658
0,2380	0,0566	0,0135	0,1814	0,2245	0,1161	0,03291	0,05040	0,04072	0,02106	0,02606
0,2368	0,0561	0,0134	0,1801	0,2234	0,1037	0,03265	0,04991	0,04059	0,01874	0,02317
0,2757	0,0760	0,0210	0,1997	0,2547	0,1173	0,03989	0,06487	0,05086	0,02343	0,02988
0,3391	0,1150	0,0390	0,2241	0,3001	0,1387	0,05022	0,09006	0,06725	0,03108	0,04162
0,3814	0,1454	0,0555	0,2360	0,3259	0,1409	0,05570	0,10621	0,07691	0,03325	0,04592
0,3814	0,1454	0,0555	0,2360	0,3259	0,1464	0,05570	0,10621	0,07691	0,03455	0,04771
0,3795	0,1440	0,0546	0,2355	0,3249	0,1471	0,05546	0,10556	0,07651	0,03464	0,04779
0,4373	0,1912	0,0836	0,2461	0,3537	0,1538	0,06057	0,12510	0,08705	0,03785	0,05440
0,4373	0,1912	0,0836	0,2461	0,3537	0,1645	0,06057	0,12510	0,08705	0,04048	0,05819
0,5095	0,2596	0,1323	0,2499	0,3772	0,1944	0,06245	0,14228	0,09426	0,04858	0,07333
0,5095	0,2596	0,1323	0,2499	0,3772	0,1886	0,06245	0,14228	0,09426	0,04713	0,07114
0,5070	0,2570	0,1303	0,2500	0,3767	0,1883	0,06250	0,14190	0,09418	0,04708	0,07093
0,5816	0,3383	0,1968	0,2433	0,3848	0,1887	0,05919	0,14807	0,09362	0,04591	0,07261
0,5816	0,3383	0,1968	0,2433	0,3848	0,1943	0,05919	0,14807	0,09362	0,04727	0,07477
0,5787	0,3349	0,1938	0,2438	0,3849	0,1892	0,05944	0,14815	0,09384	0,04613	0,07282
0,6511	0,4239	0,2761	0,2272	0,3750	0,1789	0,05162	0,14062	0,08520	0,04065	0,06709
0,6511	0,4239	0,2761	0,2272	0,3750	0,1636	0,05162	0,14062	0,08520	0,03717	0,06135
0,6479	0,4198	0,2720	0,2281	0,3759	0,1834	0,05203	0,14130	0,08574	0,04183	0,06894
0,7123	0,5074	0,3615	0,2049	0,3508	0,1885	0,04198	0,12306	0,07188	0,03862	0,06613
0,7123	0,5074	0,3615	0,2049	0,3508	0,1876	0,04198	0,12306	0,07188	0,03844	0,06581
0,7088	0,5024	0,3561	0,2064	0,3527	0,1848	0,04260	0,12440	0,07280	0,03814	0,06518
0,7954	0,6327	0,5032	0,1627	0,2922	0,1770	0,02647	0,08538	0,04754	0,02880	0,05172
0,7954	0,6327	0,5032	0,1627	0,2922	0,1746	0,02647	0,08538	0,04754	0,02841	0,05102
0,7915	0,6265	0,4959	0,1650	0,2956	0,1821	0,02722	0,08738	0,04877	0,03005	0,05383
0,8344	0,6962	0,5809	0,1382	0,2535	0,1582	0,01910	0,06426	0,03503	0,02186	0,04010
0,8344	0,6962	0,5809	0,1382	0,2535	0,1621	0,01910	0,06426	0,03503	0,02240	0,04109
0,8302	0,6892	0,5723	0,1410	0,2579	0,1548	0,01988	0,06651	0,03636	0,02183	0,03992
0,8641	0,7467	0,6452	0,1174	0,2189	0,1127	0,01378	0,04792	0,02570	0,01323	0,02467
0,8598	0,7392	0,6356	0,1206	0,2242	0,1046	0,01454	0,05027	0,02704	0,01261	0,02345
					Summen:	1,38255	3,20716	2,08860	1,04600	1,61731

Nach dieser Tabelle ist

$$\Sigma(u^2) = 1{,}38255,\ \Sigma(v^2) = 3{,}20716,\ \Sigma(uv) = 2{,}08860,\ \Sigma(uz) = 1{,}04600 \text{ und } \Sigma(vz) = 1{,}61731,$$

und hieraus folgen mittels obiger Formeln:

$$B = \frac{3{,}20716.\ 1{,}04600 - 2{,}08860.\ 1{,}61731}{1{,}38255.\ 3{,}20716 - 2{,}08860.\ 2{,}08860} = \frac{3{,}354690 - 3{,}377914}{4{,}434060 - 4{,}362250} = -\frac{23224}{71810}$$

$$= -0{,}3234 \text{. und}$$

$$C = \frac{1{,}38255 .\ 1{,}61731 - 2{,}08860 .\ 1{,}04600}{4{,}434060 - 4{,}362250} = \frac{2{,}236013 - 2{,}184676}{0{,}071810} = \frac{51337}{71810}$$

$= 0{,}7149$; endlich

$$A = 0{,}6308 - (B + C) = 0{,}6308 + 0{,}3234 - 0{,}7149 = 0{,}2393.$$

Die gesuchte Gleichung ist demnach

$$y = 0{,}2393\, x - 0{,}3234\, x^2 + 0{,}7149\, x^3.$$

Sie gibt für $x = 0{,}1$, $y = 0{,}021$; $x = 0{,}2$, $y = 0{,}041$, $x = 0{,}3$, $y = 0{,}062$;
$x = 0{,}4$, $y = 0{,}090$; $x = 0{,}5$, $y = 0{,}128$, $x = 0{,}6$, $y = 0{,}180$;
$x = 0{,}7$, $y = 0{,}254$; $x = 0{,}8$, $y = 0{,}351$, $x = 0{,}9$, $y = 0{,}475$.

Vergleicht man diese Coordinaten mit denen der zuletzt gefundenen Curve, so findet man, dass sich diese Curve zwar anfänglich über jener hinzieht, dass sie aber in der zweiten Hälfte ihres Laufes sehr nahe unter jener fortgeht und zuletzt fast ganz mit ihr zusammenfällt. Das Nullsetzen des ersten Differentialverhältnisses der gefundenen Gleichung gibt $x = \frac{0{,}6468}{4{,}2894} = 0{,}151$; es ist also an dieser Stelle ein Wendungspunkt der Curve, d. i. sie geht daselbst aus der Concavität in Convexität über. Dieser Umstand in Vereinigung mit dem, dass diese Curve gerade in ihrem Anfang, wo wegen der häufigeren Anwendung eine grössere Schärfe wünschenswerth ist, auffallend zu hoch über den Punkten der Beobachtung weggeht, möchte es nicht rathsam machen, durch diese Curve das gesetzmässige Wachsen der Ausflusscoefficienten auszudrücken.

Prüfen wir endlich noch die allgemeine Gleichung der gemeinen Parabel.

Die allgemeinste Form der Parabelgleichung ist

$$y + Axy = Bx + Cx^2, \text{ oder}$$

$$y = \frac{Bx + Cx^2}{1 + Ax}.$$

Nun ist aber für $x = 1$, $y = 0{,}6308$, daher

$$0{,}6308 + 0{,}6308\, A = B + C, \text{ auch}$$

$$0{,}6308\, x^2 + 0{,}6308\, Ax^2 = Bx^2 + Cx^2;$$

es folgt demnach durch Subtraction dieser Gleichung von der ersten Gleichung:

$$y - 0{,}6308\, x^2 = A\,(0{,}6308\, x^2 - xy) + B\,(x - x^2).$$

Bezeichnen wir noch $y - 0{,}6308\, x^2$ mit z, $A\,(0{,}6308\, x^2 - xy)$ mit u, und $B\,(x - x^2)$ mit v, so erhalten wir die Formel

$$z = Au + Bv.$$

Setzen wir voraus, dass die Wahrscheinlichkeit, einen positiven Fehler in z zu begehen, gleich ist der für einen gleich grossen negativen, so erhalten wir die Constanten A und B mittels folgender durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Formeln:

$$A = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(uz) - \Sigma(uv)\,\Sigma(vz)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)} \text{ und}$$

$$B = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(vz) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uz)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)}.$$

Zur Berechnung der Coefficienten mittels dieser Formeln ist folgende Tabelle zusammengesetzt worden.

Tabelle V.

$x = \frac{a}{a_1}$.	x^2.	$y = \frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$.	xy.	$z = y - 0{,}6308\,x^2$.	$u = 0{,}3608\,x^2 - xy$.	$v = x - x^2$.
0,0461	0,0021	0,0000	0,0000	— 0,0013	0,0013	0,0440
0,0629	0,0040	0,0065	0,0004	+ 0,0040	0,0021	0,0589
0,0937	0,0088	0,0169	0,0016	+ 0,0114	0,0039	0,0849
0,1406	0,0198	0,0146	0,0021	+ 0,0021	0,0104	0,1208
0,1406	0,0198	0,0122	0,0017	— 0,0003	0,0108	0,1208
0,1399	0,0196	0,0086	0,0012	— 0,0037	0,0111	0,1203
0,1867	0,0348	0,0250	0,0047	+ 0,0030	0,0173	0,1519
0,1867	0,0348	0,0381	0,0071	+ 0,0161	0,0149	0,1519
0,1857	0,0345	0,0246	0,0046	+ 0,0028	0,0172	0,1512
0,2380	0,0566	0,0341	0,0081	— 0,0016	0,0276	0,1814
0,2368	0,0561	0,0457	0,0108	+ 0,0103	0,0246	0,1807
0,2757	0,0760	0,0566	0,0156	+ 0,0087	0,0323	0,1997
0,3391	0,1150	0,0752	0,0255	+ 0,0027	0,0470	0,2241
0,3814	0,1454	0,0997	0,0380	+ 0,0079	0,0538	0,2369
0,3814	0,1454	0,0942	0,0359	+ 0,0024	0,0554	0,2360
0,3795	0,1440	0,0923	0,0350	+ 0,0015	0,0558	0,2355
0,4373	0,1912	0,1221	0,0534	+ 0,0015	0,0672	0,2461
0,4373	0,1912	0,1114	0,0487	— 0,0092	0,0719	0,2461
0,5095	0,2596	0,1270	0,0647	— 0,0367	0,0990	0,2499
0,5095	0,2596	0,1328	0,0677	— 0,0309	0,0960	0,2499
0,5070	0,2570	0,1315	0,0667	— 0,0306	0,0954	0,2500
0,5816	0,3383	0,1782	0,1036	— 0,0352	0,1098	0,2433
0,5816	0,3383	0,1726	0,1004	— 0,0408	0,1130	0,2433
0,5787	0,3349	0,1758	0,1017	— 0,0357	0,1096	0,2438
0,6511	0,4239	0,2318	0,1509	— 0,0356	0,1165	0,2272
0,6511	0,4239	0,2471	0,1609	— 0,0203	0,1065	0,2272
0,6479	0,4198	0,2253	0,1460	— 0,0395	0,1188	0,2281
0,7123	0,5074	0,2608	0,1858	— 0,0592	0,1342	0,2049
0,7123	0,5074	0,2617	0,1864	— 0,0583	0,1336	0,2049
0,7088	0,5024	0,2623	0,1859	— 0,0546	0,1310	0,2064
0,7954	0,6327	0,3247	0,2583	— 0,0744	0,1408	0,1627
0,7954	0,6327	0,3271	0,2602	— 0,0720	0,1389	0,1627
0,7915	0,6265	0,3172	0,2511	— 0,0780	0,1441	0,1650
0,8344	0,6962	0,3681	0,3071	— 0,0711	0,1321	0,1382
0,8344	0,6962	0,3642	0,3039	— 0,0750	0,1353	0,1382
0,8302	0,6892	0,3689	0,3063	— 0,0659	0,1285	0,1410
0,8641	0,7467	0,4324	0,3736	— 0,0386	0,0974	0,1174
0,8598	0,7392	0,4378	0,3764	— 0,0285	0,0899	0,1206

Aus den in den letzten drei Vertikalcolumnen aufgezeichneten Werthen von z, u und v sind die Werthe von u^2, v^2, uv, uz und vz berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle VI.

x.	u^2.	v^2.	uv.	uz.	vz.
0,0461	0,000002	0,001934	0,000057	— 0,000002	— 0,000057
0,0629	0,000004	0,003474	0,000124	+ 0,000008	+ 0,000236
0,0937	0,000015	0,007211	0,000331	+ 0,000044	+ 0,000969
0,1406	0,000108	0,014601	0,001256	+ 0,000022	+ 0,000254
0,1406	0,000117	0,014601	0,001305	— 0,000003	— 0,000036
0,1399	0,000123	0,014478	0,001335	— 0,000041	— 0,000445
0,1867	0,000299	0,023056	0,002628	+ 0,000052	+ 0,000452
0,1867	0,000222	0,023056	0,002263	+ 0,000240	+ 0,002445
0,1857	0,000296	0,022866	0,002601	+ 0,000048	+ 0,000423
0,2380	0,000762	0,032890	0,005007	— 0,000044	— 0,000290
0,2368	0,000605	0,032662	0,004445	+ 0,000253	+ 0,001861
0,2757	0,001043	0,039876	0,006450	+ 0,000281	+ 0,001737
0,3391	0,002209	0,050226	0,010533	+ 0,000127	+ 0,000605
0,3814	0,002894	0,055665	0,012697	+ 0,000425	+ 0,001864
0,3814	0,003069	0,055665	0,013074	+ 0,000133	+ 0,000566
0,3795	0,003115	0,055451	0,013141	+ 0,000084	+ 0,000353
0,4373	0,004516	0,060550	0,006538	+ 0,000101	+ 0,000369
0,4373	0,005170	0,060550	0,017694	— 0,000661	— 0,002264
0,5095	0,009801	0,062455	0,024740	— 0,003633	— 0,009172
0,5095	0,009216	0,062455	0,023990	— 0,002966	— 0,007722
0,5070	0,009101	0,062475	0,023850	— 0,002919	— 0,007649
0,5816	0,012056	0,059215	0,026714	— 0,003865	— 0,008566
0,5816	0,012769	0,059215	0,027493	— 0,004610	— 0,009928
0,5787	0,012012	0,059442	0,026720	— 0,003913	— 0,008704
0,6511	0,013572	0,051605	0,026469	— 0,004147	— 0,008087
0,6511	0,011342	0,051605	0,024196	— 0,002162	— 0,004612
0,6479	0,014113	0,052041	0,027098	— 0,004693	— 0,009011
0,7123	0,018009	0,041996	0,027498	— 0,007945	— 0,012132
0,7123	0,017849	0,041996	0,027374	— 0,007789	— 0,011947
0.7088	0,017161	0,042602	0,027038	— 0,007153	— 0,011269
0,7954	0,019825	0,026484	0,022908	— 0,010476	— 0,012107
0,7954	0,019293	0,026484	0,022599	— 0,010001	— 0,011717
0,7915	0,020765	0,027234	0,023776	— 0,011240	— 0,012872
0,8344	0,017450	0,019092	0,018256	— 0,009392	— 0,009824
0,8344	0,018306	0,019092	0,018698	— 0,010147	— 0,010363
0,8302	0,016512	0,019872	0,018118	— 0,008468	— 0,009290
0,8641	0,009487	0,013790	0,011435	— 0,003760	— 0,004533
0,8598	0,008082	0,014530	0,010842	— 0,002562	— 0,003436
Summen:	0,311290 $= \Sigma(u^2)$	1,382490 $= \Sigma(v^2)$	0,571291 $= \Sigma(uv)$	— 0,120774 $= \Sigma(uz)$	— 0,173899 $= \Sigma(vz)$.

Setzt man diese Summenwerthe in die obigen Ausdrücke für A und B, so erhält man

$$A = -\frac{1{,}382490 .\ 0{,}120774 - 0{,}571291 .\ 0{,}173899}{0{,}311290 .\ 1{,}382490 - 0{,}571291 .\ 0{,}571291} = -\frac{0{,}166969 - 0{,}099347}{0{,}43035 - 0{,}32637}$$

$$= \frac{0{,}067622}{0{,}10398} = -0{,}6503 \text{, ferner}$$

$$B = \frac{-0{,}311290.\ 0{,}173899 + 0{,}571291.\ 0{,}120774}{0{,}10398} = \frac{0{,}068997 - 0{,}054133}{0{,}10398}$$

$$= \frac{0{,}014864}{0{,}10398} = 0{,}1430,\ \text{endlich}$$

$$C = 0{,}6308 + 0{,}6308\,A - B = 0{,}6308 - 0{,}4102 - 0{,}1430 = 0{,}0776.$$

Hiernach ist denn die Formel für die Correction der Ausflusscoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction

$$y = \frac{0{,}1430\,x + 0{,}0776\,x^2}{1 - 0{,}6503\,x} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}1430 + 0{,}0776\,\frac{a}{a_1}}{1 - 0{,}6503\,\frac{a}{a_1}} \cdot \frac{a}{a_1}.$$

Setzt man die in den obigen Tabellen aufgeführten Werthe von x in diese Formel ein, so erhält man eine Reihe von Werthen für y, welche in der dritten Columne der folgenden Tabelle aufgezeichnet sind und allerdings zum Theil noch beträchtlich von den beobachteten Werthen abweichen, wie man aus den in der vierten Columne enthaltenen Differenzen sieht.

Tabelle VII.

x.	y		Differenzen.	u_1.	v_1.	Correctionen.	Corrigirte Differenzen.	Quadrate der Differenzen.
	beobachtet.	berechnet.						
0,0461	0,0000	0,0069	— 0,0069	0,0013	0,0427	+ 0,0008	— 0,0061	0,0000372
0,0629	0,0065	0,0097	— 0,0032	0,0020	0,0566	+ 0,0011	— 0,0021	0,0000044
0,0937	0,0169	0,0150	+ 0,0019	0,0037	0,0800	+ 0,0015	+ 0,0034	0,0000116
0,1406	0,0146	0,0238	— 0,0092	0,0096	0,1107	+ 0,0019	— 0,0073	0,0000533
0,1406	0,0122	0,0238	— 0,0116	0,0099	0,1107	+ 0,0019	— 0,0097	0,0000941
0,1399	0,0086	0,0237	— 0,0151	0,0102	0,1103	+ 0,0019	— 0,0132	0,0001742
0,1867	0,0250	0,0335	— 0,0085	0,0154	0,1354	+ 0,0022	— 0,0063	0,0000370
0,1867	0,0381	0,0335	+ 0,0046	0,0133	0,1355	+ 0,0022	+ 0,0068	0,0000462
0,1857	0,0246	0,0332	— 0,0086	0,0154	0,1349	+ 0,0022	— 0,0064	0,0000410
0,2380	0,0341	0,0455	— 0,0114	0,0239	0,1528	+ 0,0022	— 0,0092	0,0000846
0,2368	0,0457	0,0452	+ 0,0005	0,0213	0,1566	+ 0,0024	+ 0,0029	0,0000084
0,2757	0,0566	0,0552	+ 0,0014	0,0274	0,1694	+ 0,0024	+ 0,0038	0,0000144
0,3391	0,0752	0,0737	+ 0,0015	0,0385	0,1837	+ 0,0022	+ 0,0037	0,0000137
0,3814	0,0997	0,0875	+ 0,0122	0,0431	0,1891	+ 0,0021	+ 0,0143	0,0002045
0,3814	0,0942	0,0875	+ 0,0067	0,0444	0,1891	+ 0,0021	+ 0,0088	0,0000774
0,3795	0,0923	0,0869	+ 0,0054	0,0448	0,1888	+ 0,0020	+ 0,0074	0,0000548
0,4373	0,1221	0,1081	+ 0,0140	0,0523	0,1917	+ 0,0017	+ 0,0157	0,0002465
0,4373	0,1114	0,1081	+ 0,0033	0,0560	0,1917	+ 0,0016	+ 0,0049	0,0000240
0,5095	0,1270	0,1391	— 0,0121	0,0744	0,1877	+ 0,0007	— 0,0114	0,0001300
0,5095	0,1328	0,1391	— 0,0063	0,0721	0,1877	+ 0,0008	— 0,0055	0,0000302
0,5070	0,1315	0,1378	— 0,0063	0,0717	0,1880	+ 0,0008	— 0,0055	0,0000303
0,5816	0,1782	0,1760	+ 0,0022	0,0797	0,1765	+ 0,0002	+ 0,0024	0,0000058
0,5816	0,1726	0,1760	— 0,0034	0,0820	0,1765	+ 0,0001	— 0,0033	0,0000109
0,5787	0,1758	0,1744	+ 0,0014	0,0797	0,1771	+ 0,0002	+ 0,0016	0,0000026
0,6511	0,2318	0,2185	+ 0,0133	0,0818	0,1596	— 0,0002	+ 0,0131	0,0001716
0,6511	0,2471	0,2185	+ 0,0286	0,0748	0,1596	— 0,0001	+ 0,0285	0,0008122
0,6419	0,2253	0,2147	+ 0,0106	0,0836	0,1605	— 0,0003	+ 0,0103	0,0001061

x.	y beobachtet.	y berechnet.	Differenzen.	u_1.	v_1.	Correctionen.	Corrigirte Differenzen.	Quadrate der Differenzen.
0,7123	0,2608	0,2633	— 0,0025	0,0917	0,1401	— 0,0010	— 0,0035	0,0000122
0,7123	0,2617	0,2633	— 0,0016	0,0913	0,1400	— 0,0011	— 0,0027	0,0000073
0,7088	0,2623	0,2603	+ 0,0020	0,0897	0,1400	— 0,0010	+ 0,0010	0,0000010
0,7954	0,3247	0,3373	— 0,0126	0,0928	0,1072	— 0,0018	— 0,0144	0,0002074
0,7954	0,3271	0,3373	— 0,0102	0,0916	0,1073	— 0,0018	— 0,0120	0,0001440
0,7915	0,3172	0,3334	— 0,0162	0,0951	0,1081	— 0,0019	— 0,0181	0,0003276
0,8344	0,3681	0,3790	— 0,0109	0,0856	0,0900	— 0,0019	— 0,0128	0,0001638
0,8344	0,3642	0,3790	— 0,0148	0,0877	0,0899	— 0,0020	— 0,0168	0,0002822
0,8302	0,3689	0,3743	— 0,0054	0,0834	0,0916	— 0,0017	— 0,0071	0,0000504
0,8641	0,4324	0,4143	+ 0,0181	0,0624	0,0752	— 0,0012	+ 0,0169	0,0002856
0,8598	0,4378	0,4090	+ 0,0288	0,0577	0,0774	— 0,0009	+ 0,0279	0,0007784
Summen:	6,2251	6,2454	— 0,0351	0,5069	2,7174	+ 0,0351	0,0000	0,0047869
			+ 0,0148	+ 1,5523	+ 2,5523	— 0,0148		
			= — 0,0203	= 3,0592	= 5,2697	= + 0,0203		

Die Summe der Differenzen oder Fehler in y ist nicht Null ausgefallen, weil wir nicht die Voraussetzung gemacht haben, dass die Wahrscheinlichkeiten für einen positiven und für einen gleich grossen negativen Fehler gleich sind; um dieses zu erlangen, müssen wir vielmehr noch eine Correction an den gefundenen Coefficienten A, B und C anbringen. Aus der Gleichung

$$y - 0{,}6308\,x^2 = A\,(0{,}6308\,x^2 - xy) + B\,(x - x^2)$$

folgt durch Differenziiren in Hinsicht auf y, A und B:

$$dy = (0{,}6308\,x^2 - xy)\,dA - Axdy + (x - x^2)\,dB,$$

demnach

$$dy = \frac{0{,}6308\,x^2 - xy}{1 + Ax}.\,dA + \frac{x - x^2}{1 + Ax}.\,dB = \frac{u.\,dA}{1 + Ax} + \frac{vdB}{1 + Ax},$$

oder, wenn wir $\frac{u}{1 + Ax} = u_1$ und $\frac{v}{1 + Ax} = v_1$ setzen,

$$dy = u_1 dA + v_1 dB.$$

Berechnen wir nun mittels der Werthe A, x, u und v die Werthe u_1 und v_1, so bekommen wir 38 Gleichungen, aus welchen sich wieder durch die Methode der kleinsten Quadrate oder durch eine andere Methode die mittleren Werthe der Correctionen dA und dB bestimmen lassen. Da wir es nur mit der Ausmittelung kleiner Werthe zu thun haben, so möchte das Verfahren, die gegebenen Gleichungen in zwei Gruppen zu theilen, die Gleichungen je einer Gruppe zu addiren und die so erhaltenen zwei Gleichungen nach den Regeln der Algebra in Beziehung auf die zwei Unbekannten dA und dB aufzulösen, völlig genügend sein.

Zu diesem Zwecke sind in der fünften und sechsten Columne der obigen Tabelle noch die Werthe von u_1 und v_1 aufgeführt, und die ersten 19 Werthe sowie die letzten 19 besonders addirt worden, weshalb sich nun folgende zwei Bestimmungsgleichungen herausgestellt haben:

$$- 0{,}0351 = 0{,}5069.\,dA + 2{,}7174.\,dB,$$
$$+ 0{,}0148 = 1{,}5523.\,dA + 2{,}5523.\,dB, \text{ oder}$$
$$- 0{,}06925 = dA + 5{,}361.\,dB,$$
$$+ 0{,}00953 = dA + 1{,}644.\,dB.$$

Hieraus folgen $dB = -\frac{0,07878}{3,717} = -0,0212$ und $dA = 0,00953 + 0,03485 = 0,0444$.

Die Formel für die Correctionen der zuerst berechneten y ist demnach

$$dy = 0,0444.\, u_1 - 0,0212.\, v_1.$$

Die nach dieser Formel berechneten Correctionen sind in der siebenten Columne der obigen Tabelle aufgeführt, und die hiernach corrigirten Werthe von y enthält die achte Columne. Man sieht, dass ihre Summe (6,2251) der Summe der beobachteten y vollkommen gleich und deshalb eine weitere Correction nicht nöthig ist.

Endlich sind in der letzten Columne der obigen Tabelle die Quadrate der Differenzen oder Fehler aufgeführt worden, um aus der Summe dieser auf den Grad der Genauigkeit der Beobachtungen oder eigentlich auf die Genauigkeit des Anschliessens der Formel an die Beobachtungen schliessen zu können. Die Summe dieser Quadrate ist 0,0047869, und hiernach der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung, unter der Voraussetzung, dass die Formel das richtige Gesetz ausdrückt:

$$F = \pm\, 0,6745 \sqrt{\frac{0,0047869}{38-2}} = \pm\, 0,1124 \sqrt{0,0047869} = \pm\, 0,0078.$$

Bei Zugrundelegung der Exponentialfunction $y = A\,(a^x - 1)$ wurde oben $F = \pm\, 0,0084$ gefunden; es scheint sich also hiernach die parabolische Formel noch schärfer an die Beobachtungen anzuschliessen als die Exponentialfunction.

Wir können mithin ohne Bedenken

$$A = -0,6503 + dA = -0,6503 + 0,0444 = -0,6059,$$
$$B = 0,1430 + dB = 0,1430 - 0,0212 = 0,1218 \text{ und}$$
$$C = 0,6308 - 0,6308.\, 0,6059 - 0,1218 = 0,1268$$

setzen, und erhalten sonach

$$y = \frac{0,1218\, x + 0,1268\, x^2}{1 - 0,6059\, x} \text{ oder}$$

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{\left(0,1218 + 0,1268.\,\frac{a}{a_1}\right)\frac{a}{a_1}}{1 - 0,6059\,\frac{a}{a_1}} = 0,1218\,\frac{a}{a_1}.\left(\frac{1 + 1,0411.\,\frac{a}{a_1}}{1 - 0,6059.\,\frac{a}{a_1}}\right).$$

Es ist also der Ausflusscoefficient für eine Mündung vom relativen Inhalte $\frac{a}{a_1}$:

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\left[1 + 0,1218\,\frac{a}{a_1}.\left(\frac{1 + 1,0411.\,\frac{a}{a_1}}{1 - 0,6059\,\frac{a}{a_1}}\right)\right],$$

wenn μ den Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction oder unendlich kleinem Querschnittsverhältnisse $\frac{a}{a_1}$ bezeichnet.

Der Berechnung der Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction nach dieser Formel ist man überhoben, wenn man von folgender Tabelle Gebrauch macht.

Tabelle VIII.

Die nach der Formel $y = \frac{0{,}1218\,x + 0{,}1268\,x^2}{1 - 0{,}6059\,x}$ berechneten Correctionen der Ausflusscoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction.

		Zehntel.									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Hundertel.	0	0,000	0,014	0,034	0,059	0,091	0,133	0,187	0,256	0,346	0,465
	1	0,001	0,016	0,036	0,062	0,095	0,138	0,193	0,264	0,357	0,481
	2	0,002	0,018	0,038	0,065	0,099	0,142	0,199	0,272	0,368	0,496
	3	0,004	0,019	0,040	0,068	0,103	0,147	0,205	0,281	0,379	0,511
	4	0,005	0,021	0,043	0,071	0,106	0,153	0,212	0,289	0,391	0,526
	5	0,007	0,023	0,045	0,074	0,110	0,158	0,219	0,298	0,402	0,542
	6	0,008	0,025	0,048	0,077	0,115	0,163	0,226	0,307	0,414	0,559
	7	0,009	0,027	0,050	0,080	0,119	0,169	0,233	0,317	0,427	0,576
	8	0,011	0,029	0,053	0,084	0,124	0,175	0,240	0,326	0,440	0,594
	9	0,013	0,031	0,056	0,087	0,128	0,180	0,248	0,336	0,453	0,612

Der Gebrauch dieser Tabelle ist vollkommen derselbe wie der der Tabelle No. III. Hiernach ist z. B. für den relativen Inhalt der Mündung $x = 0{,}45$ die Correction des Ausflusscoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction $y = 0{,}110$, weil die Zahl 0,110 in der 0,4 entsprechenden Vertikalcolumne und in der 00,5 entsprechenden Horizontalcolumne zugleich enthalten ist. Die nach der Exponentialfunction construirte Tabelle gibt für denselben Fall $y = 0{,}108$; daher möchte es rathsam sein, das Mittel $y = 0{,}109$ anzunehmen.

Vergleicht man die Werthe in den Tabellen No. III. und No. VIII. mit einander, so findet man eine sehr zufriedenstellende Uebereinstimmung; anfänglich sind die Werthe der letzteren Tabelle etwas grösser, und nachdem für $x = 0{,}4$ bis 0,5 die Differenz bis 0,003 angewachsen ist, wird dieselbe immer kleiner und kleiner, verschwindet bei $x = 0{,}7$ ganz und von nun an fallen die Werthe der letzten Tabelle wenig kleiner aus als die der ersten; endlich verschwindet, nachdem die Abweichung das Maximum — 0,004 erreicht hat, diese Verschiedenheit allmälig ganz. Eine nach der zuletzt gefundenen Formel oder nach der letzten Tabelle construirte Curve würde sich demnach ganz nahe an der nach der Exponentialfunction construirten Curve *AKB*, und zwar anfänglich über und am Ende unter derselben hinziehen.

Aus den Mittelwerthen beider Tabellen kann man für den praktischen Gebrauch folgende Tabelle zusammensetzen.

Tabelle IX.

Zur Ausmittelung der Correctionen der Ausflusscoefficienten für unvollkommene Contraction.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,014	0,033	0,058	0,090	0,131	0,185	0,256	0,347	0,468
1	0,001	0,016	0,035	0,061	0,094	0,136	0,192	0,264	0,358	0,483
2	0,002	0,017	0,037	0,064	0,098	0,141	0,198	0,272	0,369	0,498
3	0,004	0,019	0,039	0,067	0,102	0,146	0,204	0,281	0,380	0,513
4	0,005	0,021	0,042	0,070	0,105	0,151	0,211	0,290	0,392	0,528
5	0,007	0,023	0,044	0,073	0,109	0,157	0,219	0,299	0,404	0,544
6	0,008	0,025	0,047	0,076	0,113	0,162	0,226	0,308	0,416	0,560
7	0,009	0,027	0,049	0,079	0,117	0,168	0,233	0,317	0,429	0,577
8	0,011	0,029	0,052	0,083	0,122	0,174	0,240	0,327	0,442	0,594
9	0,012	0,031	0,055	0,086	0,126	0,179	0,248	0,337	0,455	0,612

Da die Einrichtung dieser Tabelle mit der der obigen vollkommen übereinstimmt, so ist über den Gebrauch derselben nichts weiter zu sagen.

Allerdings haben schon Schriftsteller vor mir, wie z. B. *Langsdorf, Schitko* u. s. w., von einer Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten gesprochen und dieselbe auszumitteln gesucht, und es wäre deshalb hier der Ort, über die Leistungen dieser das Nöthige zu sagen; da indessen nur die Schrift von *Schitko*: „Meine Ansicht über die Hydrodynamik" der neuern Zeit angehört, und den älteren Theorien der Art durch Nichtachtung von Seiten aller vorzüglichen Hydrauliker der neuern Zeit ihr Urtheil gefällt worden ist, so mögen nur ein Paar Worte über *Schitko's* Fiction gesagt und der gänzliche Mangel an Uebereinstimmung der *Schitko*'schen Formel mit den Erfahrungen nachgewiesen werden. *Schitko* findet Seite 17 der angeführten Schrift durch Zugrundelegung einer sonderbaren Fiction die Formel

$$\mu = \sqrt{\varphi + (1 - \varphi)\frac{\alpha}{a}};$$

in derselben bedeutet α den Querschnitt der Mündung, a den des Bodens, worin diese befindlich ist, φ das Quadrat des Ausflusscoefficienten 0,616 bei unendlich kleinem Querschnittsverhältniss, endlich μ den dem endlichen Querschnittsverhältnisse $\frac{\alpha}{a}$ entsprechenden Ausflusscoefficienten.

Diese Formel nimmt, wenn man nach *Schitko* $\varphi = (0{,}616)^2 = 0{,}38$ einsetzt, die Gestalt

$$\mu = \sqrt{0{,}38 + 0{,}62\,\frac{\alpha}{a}}$$

an und gibt allerdings für die Grenzwerthe $\frac{\alpha}{a} = 0$ und $\frac{\alpha}{a} = 1$ die richtigen Coefficienten $\mu = 0{,}616$ und $\mu = 1$, allein gänzlich von den Erfahrungen abweichende Resultate erhält man für mittlere Werthe von $\frac{\alpha}{a}$.

Setzen wir, um die möglichgrösste Uebereinstimmung mit unseren Untersuchungen herbeizuführen, μ nicht $= 0{,}616$, sondern $= 0{,}6132$, so bekommen wir

$$\mu = \sqrt{0,376 + 0,624 \frac{\alpha}{a}},$$

oder nach unserer Bezeichnung

$$\mu (1 + y) = \sqrt{0,376 + 0,624\, x}, \text{ folglich}$$

$$y = \sqrt{1 + (\frac{1}{\mu^2} - 1)\, x} - 1 = \sqrt{1 + 1,6595.\, x} - 1.$$

Das zweite Differenzialverhältniss dieser Gleichung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{0,4149}{\sqrt{(1 + 1,6595\, x)^3}},$$

also negativ, und demnach die dieser Gleichnng entsprechende Curve concav. Die aus den Beobachtungen abgeleiteten Curven sind aber bedeutend convex, und es folgt allerdings schon hieraus die gänzliche Unrichtigkeit der Formel von *Schitko;* allein noch mehr in die Augen fallend wird diese Abweichung von den Erfahrungen, wenn man die den Abscissen $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ entsprechenden Coordinaten $y = 0,189, 0,353, 0,498$ mit den oben gefundenen Werthen 0,044, 0,131, 0,300 vergleicht, oder wenn man einen Blick auf die Tafel No. II. wirft, wo *AFB* die nach der *Schitko*'schen Formel construirte Curve vorstellt.

Wie unrichtig die *Schitko*'schen Ansichten über Hydraulik auch in anderen Beziehungen sind, habe ich an einem anderen Orte (Allgemeine Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluss") nachgewiesen.

Es ist endlich auch noch einer Unvollkommenheit der von uns aufgefundenen Formeln und der hiernach construirten Tabellen und Curven zu gedenken. Es gelten nämlich diese Formeln nur in dem Falle, wenn der Ausflusscoefficient für die vollkommene Contraction 0,6132 ist; nun ist dieser aber nur ein mittlerer Werth, und es kommen auch Ausflusscoefficienten vor, die ein oder einige Procent grösser oder kleiner sind, es ist also die Frage, welchen Einfluss haben diese Abweichungen auf die von unseren Formeln gegebenen Werthe? Unsere Gleichung

$$y - (\frac{1}{\mu} - 1)\, x^2 = A\left((\frac{1}{\mu} - 1)\, x^2 - xy\right) + B\,(x - x^2);$$

gibt durch Differenziiren in Beziehung auf μ und y:

$$dy + \frac{x^2 d\mu}{\mu^2} = - \frac{Ax^2 d\mu}{\mu^2} - Axdy, \text{ oder}$$

$$dy = - \frac{(1 + A)\, x^2 d\mu}{(1 + Ax)\, \mu^2},$$

und setzen wir hierein $A = -0,6059$, so bekommen wir

$$dy = - \frac{0,3941\, x^2 d\mu}{(1 - 0,6059\, x)\, \mu^2},$$

einen Ausdruck, welcher dazu dienen kann, um aus einer kleinen Veränderung $d\mu$ im Ausflusscoefficienten μ für vollkommene Contraction die entsprechende Differenz oder Veränderung in der Correction y wegen Unvollkommenheit der Contraction zu finden.

Wir können auch $d\mu = \mu - 0,6132$ und $dy = y_1 - y$, wo y_1 den corrigirten Werth von y bezeichnet, setzen, und erhalten nun

$$y_1 = y - \frac{0,3941\, (\mu - 0,6132)\, x^2}{(1 - 0,6059\, x).\, (0,62)^2}.$$

Z. B. $\mu = 0{,}62$ gäbe

$$y_1 = y - \frac{0{,}3941.\ 0{,}0068\ x^2}{0{,}3844.\ (1 - 0{,}6059\ x)} = y - \frac{0{,}007\ x^2}{1 - 0{,}6059\ x}.$$

Für $x = 1$ ist $y = 0{,}6308$, daher $y_1 = 0{,}6308 - \frac{0{,}007}{0{,}3941} = 0{,}6130$, und demnach $\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\,(1 + y_1) = 0{,}62.\ 1{,}613 = 1{,}000$, wie sehr recht.

Wäre aber $x = 0{,}07$, so würde nach der Tabelle $y = 0{,}256$, folglich $y_1 = 0{,}256 - \frac{0{,}007.\ 0{,}49}{1 - 0{,}424}$ $= 0{,}256 - 0{,}006 = 0{,}250$ zu setzen und $\mu_{\frac{a}{a_1}} = 0{,}62.\ 1{,}25 = 0{,}775$ anzunehmen sein.

In den meisten Fällen der Anwendung ist $x = \frac{a}{a_1}$ sehr klein, und deshalb fällt die Correction von y ganz unbedeutend aus, oder wird ganz unbemerkbar bei dem uns gestellten Grade der Genauigkeit. Z. B. für $x = 0{,}3$ bekommen wir bei $\mu = 0{,}62$:

$$y_1 - y = -\frac{0{,}007.\ 0{,}09}{1 - 0{,}182} = -0{,}0008,$$

also noch nicht — 0,001.

Setzen wir $\frac{0{,}3941.\ x^2}{\mu^2\,(1 - 0{,}6059\ x)} = \psi$, so können wir $y_1 - y = \psi\,(\mu - 0{,}6132)$ schreiben und in Fällen der Anwendung ψ aus folgender Tabelle, bei deren Berechnung $\frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{0{,}6132}\right)^2$ $= 2{,}66$ angenommen worden ist, entnehmen.

Tabelle X.

Hundertel.	Zehntel. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00	0,01	0,04	0,11	0,22	0,37	0,59	0,89	1,30	1,87
1	0,00	0,01	0,05	0,12	0,23	0,39	0,62	0,93	1,35	1,94
2	0,00	0,02	0,06	0,13	0,25	0,41	0,65	0,96	1,40	2,01
3	0,00	0,02	0,06	0,14	0,27	0,43	0,67	1,00	1,45	2,08
4	0,00	0,02	0,07	0,15	0,28	0,45	0,70	1,04	1,51	2,15
5	0,00	0,03	0,08	0,16	0,29	0,48	0,73	1,08	1,56	2,23
6	0,00	0,03	0,09	0,17	0,31	0,50	0,76	1,12	1,62	2,31
7	0,01	0,03	0,09	0,19	0,32	0,52	0,79	1,17	1,68	2,39
8	0,01	0,04	0,10	0,20	0,34	0,54	0,82	1,21	1,74	2,47
9	0,01	0,04	0,11	0,21	0,35	0,57	0,86	1,26	1,80	2,57

Der Gebrauch dieser Tabelle ist genau derselbe wie der von den vorigen Tabellen. Hiernach ist z. B. für $x = 0{,}51$, $\psi = 0{,}39$, weil sich diese Zahl in der fünften Vertikalcolumne und zugleich in der ersten Horizontalcolumne befindet.

Ueber die Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction wird weiter unten noch mehr gesagt werden.

β) Zusammenstellung der Ergebnisse der Versuche über die Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten überhaupt.

Aus den vorausgeschickten Ergebnissen der Versuche über den Ausfluss durch kreisförmige Mündungen in der dünnen Wand folgt allerdings, dass auch bei vollkommener Contraction oder sehr kleinem Querschnittsverhältnisse $\frac{a}{a_1}$ die Ausflusscoefficienten veränderlich sind, d. i. mit der Druckhöhe und mit dem Durchmesser der Mündung sich ändern. Das Mittel aus zehn Versuchen bei grösserem Drucke oder mittlerer Druckhöhe von 0,57 bis 0,58 Meter gibt den Ausflusscoefficienten $\mu = 0{,}61857$, dagegen das Mittel aus zehn Versuchen unter übrigens gleichen Umständen bei kleinerem Drucke oder mittlerer Druckhöhe von 0,22 bis 0,24 Meter gibt den Ausflusscoefficienten $\mu = 0{,}62645$, es ist demnach bei der kleineren Druckhöhe der Ausflusscoefficient um 0,00788 oder um 1,27 Procent grösser als bei der grösseren Druckhöhe. Die Versuche bei einer mittleren Druckhöhe von 0,41 bis 0,42 Meter, welche allerdings in kleinerer Zahl angestellt worden sind, überzeugen uns übrigens vollständig, dass mit der Abnahme der Druckhöhe innerhalb der angegebenen Grenzen ein stetiges Wachsen des Ausflusscoefficienten verbunden ist, wenn auch vielleicht dasselbe bei grösserem Drucke schwächer und bei kleinerem stärker erfolgt. Hierauf deutet namentlich auch der Umstand hin, dass wir die Abweichung des Ausflusscoefficienten bei mittlerem Drucke von dem bei grösserem Drucke fast immer kleiner gefunden haben als die Abweichung von dem Ausflusscoefficienten bei kleinerem Drucke. Einige Versuche, die wir bei noch kleinerem Drucke angestellt haben, beweisen übrigens, dass hier die Zunahme der Ausflusscoefficienten bei einer gewissen Abnahme der Druckhöhe noch weit stärker erfolgt. Die Versuche wurden nicht in der Absicht angestellt, das Gesetz dieser Veränderlichkeit auszumitteln, daher liefern sie uns auch nicht hinreichende Data, um die Abhängigkeit zwischen Druckhöhe und Ausflusscoefficienten mit Hilfe derselben auszumitteln.

Ein anderes Element, welches auf die Grösse der Ausflusscoefficienten einwirkt, ist die absolute Grösse der Mündung. Wir sehen aus unseren Beobachtungen, dass die grösste Mündung von beinahe 4 Centimeter Durchmesser den kleinsten Ausflusscoefficienten (0,6078 bei grösserer Druckhöhe und 0,6187 bei kleinerer Druckhöhe) hat, dass aber der Ausflusscoefficient wächst, wenn die Weite der Mündung abnimmt, und dass besonders dann, wenn die Weite nur noch ein Centimeter beträgt, die Zunahme dieses Coefficienten sehr schnell erfolgt; während wir die Ausflusscoefficienten bei 1,234 Centimeter Durchmesser = 0,6280 und 0,6384 gefunden haben, stellten sich dieselben bei 0,866 Centimeter Durchmesser schon = 0,6592 und 0,6727 heraus. Für Durchmesser innerhalb 1 und 4 Centimeter ist aber die Abnahme der Ausflusscoefficienten so allmälig und überhaupt so schwach, dass es uns gestattet sein möchte, innerhalb dieser Grenzen ein gleichmässiges Abnehmen der Ausflusscoefficienten anzunehmen oder diese Coefficienten und die Durchmesser der Mündungen, denen sie entsprechen, als Coordinaten einer geraden Linie anzusehen. Um aber die Lage dieser Linie zu finden, haben wir je 10 Versuche über den Ausfluss bei nahe einerlei Druckhöhe ausgehoben, dieselben zusammengestellt und aus ihnen nach der Methode der kleinsten Quadrate die beiden Parameter der Linie entwickelt. Allerdings hätten wir dieser Bestimmung noch ein Paar Versuche mehr zu Grunde legen können, allein es schien uns angemessener, nur solche Versuche zusammenzustellen, welche bei ziemlich einerlei Temperatur des Wassers (10° bis 18° Cent.) angestellt worden sind. Da aber die fehlenden bei

niedrigerer Temperatur ausgeführt wurden, und die Ergebnisse derselben auch auffallend kleiner ausgefallen sind, als die zusammengestellten, so würde durch Vereinigung beider ein reines Resultat nicht erlangt worden sein.

Folgendes ist die tabellarische Zusammenstellung der Ergebnisse der unter grösserem Drucke (0,57 bis 0,58 Meter) angestellten Versuche.

Tabelle XI.

Nummer.	Durchmesser der Mündung in Decimetern	Abweichung vom mittleren Durchmesser (u).	Ausflusscoefficient.	Abweichung vom mittleren Ausflusscoefficienten (v).	u^2.	uv.	v^2.
3	0,1234	— 0,11306	0,6280	+ 0,00943	0,012782	— 0,0010661	0,00008893
4	0,1512	— 0,08526	0,6264	+ 0,00783	0,007269	— 0,0006676	0,00006131
5	0,1742	— 0,06226	0,6238	+ 0,00523	0,003876	— 0,0003256	0,00002735
6	0,1967	— 0,03976	0,6186	+ 0,00003	0,001581	— 0,0000012	0,00000000
7	0,2117	— 0,02476	0,6125	— 0,00607	0,000613	+ 0,0001503	0,00003684
9	0,2490	+ 0,01254	0,6192	+ 0,00063	0,000112	+ 0,0000079	0,00000040
10	0,2666	+ 0,03014	0,6166	— 0,00197	0,000908	— 0,0000594	0,00000388
11	0,2878	+ 0,05134	0,6192	+ 0,00063	0,002635	+ 0,0000323	0,00000040
12	0,3075	+ 0,07104	0,6136	— 0,00497	0,005047	— 0,0003531	0,00002470
18	0,3965	+ 0,16004	0,6078	— 0,01077	0,025613	— 0,0017236	0,00011600
Summen:	2,3646	0,0000	6,1857	0,0000	0,060436	— 0,0040061	0,00035981
Mittel:	0,23646		0,61857				

Die gesuchten Parameter oder Constanten werden nach einer von mir zuerst angewendeten Methode (s. *Karsten's* Archiv für Bergbau u. s. w. Bd. XIV. No. 8. 1840 oder Allgem. Maschinenencyclopädie Artikel „Beobachtung“) auf folgende Weise ausgemittelt. Zuerst bestimmt man die Coordinaten des Schwerpunktes von dem Punktsystem, indem man die Summe der als Abscissen anzusehenden Durchmesser und die der als Ordinaten zu behandelnden Ausflusscoefficienten durch die Zahl der Beobachtungen (hier zehn) dividirt. Dadurch ergeben sich die am Fuss der zweiten und vierten Columne stehenden Zahlen (2,3646 und 0,61857). Nun subtrahire man diese mittleren Werthe von den beobachteten, oder, was dasselbe ist, man verlege den Anfang des Coordinatensystems nach dem eben gefundenen Schwerpunkte, und bestimme so die in der dritten und fünften Columne aufgezeichneten Coordinaten u und v der durch Beobachtungen gefundenen Punkte in Beziehung auf diesen neuen Anfangspunkt. Endlich berechne man, die gesuchte Linie als freie Axe des Punktsystems ansehend, den Winkel Θ, unter welchem diese Linie die Abscissenaxe schneidet, durch die Gleichung

$$\tang 2\,\Theta = \frac{2\,\Sigma\,(uv)}{\Sigma\,(u^2) - \Sigma\,(v^2)}.$$

Dieses Verfahren ist etwas einfacher als das nach der Methode der kleinsten Quadrate einzuschlagende, es führt indess, wie man sich bald überzeugen kann, zu dem nämlichen Ergebnisse.

Um die durch die letzte Formel geforderte Rechnung auszuführen, sind in der sechsten, siebenten und achten Columne die berechneten Quadrate und Produkte der neuen Ordinaten u und v aufge-

führt und ihre Summen unten hinzugefügt worden. Setzt man nun diese Werthe in die letzte Formel ein, so bekommt man

$$\text{tang}\ 2\ \Theta = -\frac{2.\ 0{,}0040061}{0{,}060436 - 0{,}00035981} = -\frac{0{,}0080122}{0{,}060076} = -\ 0{,}13337,$$

hiernach folgt

$$2\ \Theta = -\ 7^{\circ}\ 35'\ 48''\ \text{und}$$

$$\Theta = -\ 3^{\circ}\ 47'\ 54''.$$

Lässt man wegen Ersparung an Raum die 6 Zehntel in den Ordinaten oder Ausflusscoefficienten weg, oder verrückt man die Abscissenaxe parallel mit sich selbst um 0,6 in der Ordinatenrichtung, so bekommt man für die Parameter der Linie:

$$p = 0{,}23646 + 0{,}0185\ \text{cotg.}\ 3^{\circ}\ 47'\ 54'' = 0{,}23646 + 0{,}27971 = 0{,}51617,\ \text{und}$$

$$q = 0{,}01857 + 0{,}23646.\ \text{tg.}\ 3^{\circ}\ 47'\ 54'' = 0{,}01857 + 0{,}01569 = 0{,}03426.$$

Bezeichnet w den Durchmesser der Mündung in Decimetern und z den dieser Mündung entsprechenden Ausflusscoefficienten, so hat man hiernach

$$\frac{w}{0{,}51617} + \frac{z - 0{,}6}{0{,}03426} = 1;\ \text{endlich}$$

$$z = 0{,}63426 - 0{,}06637.\ w,\ \text{oder}$$

$$z = 0{,}63426 - 0{,}006637\ w,$$

wenn w in Centimetern gegeben ist.

Die so bestimmte Gerade ist die unter *ABC* liegende gestrichelte Linie auf der Tafel No. III.; fünf von den Punkten der Beobachtung liegen nahe über ihr, zwei fallen bei einem grössern Abstande unter sie, und drei liegen ziemlich genau in ihr.

Der Gebrauch dieser Formel ist sehr einfach; ist z. B. der Durchmesser einer kreisförmigen Mündung 2,3 Centimeter, so entspricht unter den obigen Umständen dieser Mündung der Ausflusscoefficient $z = 0{,}63426 - 0{,}006637.\ 2{,}3 = 0{,}619$.

Durch folgende Tabelle wird die Berechnung unnöthig.

Tabelle XII.

Ausflusscoefficienten für kreisförmige Mündungen von 1 bis 4 Centimeter Durchmesser bei vollkommener Contraction und grösserem Drucke.

	Zehntel.									
Ganze. 0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,628	0,627	0,626	0,626	0,625	0,624	0,624	0,623	0,622	0,622
2	0,621	0,620	0,620	0,619	0,618	0,618	0,617	0,616	0,616	0,615
3	0,614	0,614	0,613	0,612	0,612	0,611	0,610	0,610	0,609	0,608

Aus den unter übrigens gleichen Umständen angestellten Versuchen über den Ausfluss unter kleinerem Drucke (von 0,22 bis 0,24 Meter Druckhöhe) lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen.

Tabelle XIII.

Nummer.	Durchmesser der Mündung in Decimetern.	Abweichung u.	Ausflusscoefficient.	Abweichung v.	u^2.	uv.	v^2.
3	0,1234	— 0,11306	0,6384	+ 0,01195	0,012782	— 0,0013511	0,00014280
4	0,1512	— 0,08526	0,6365	+ 0,01005	0,007269	— 0,0008569	0,00010100
5	0,1742	— 0,06226	0,6314	+ 0,00495	0,003876	— 0,0003082	0,00002450
6	0,1967	— 0,03976	0,6293	+ 0,00285	0,001581	— 0,0001133	0,00000812
7	0,2117	— 0,02476	0,6212	— 0,00525	0,000613	+ 0,0001300	0,00002756
9	0,2490	+ 0,01254	0,6223	— 0,00415	0,000112	— 0,0000520	0,00001722
10	0,2666	+ 0,03014	0,6212	— 0,00525	0,000908	— 0,0001582	0,00002756
11	0,2878	+ 0,05134	0,6247	— 0,00175	0,002635	— 0,0000898	0,00000306
12	0,3075	+ 0,07104	0,6208	— 0,00565	0,005047	— 0,0004013	0,00003192
18	0,3965	+ 0,16004	0,6187	— 0,00775	0,025613	— 0,0012403	0,00006006
Summen:	2,3646	0,00000	6,2645	0,00000	0,060436	— 0,0044411	0,00044380
Mittel:	0,23646		0,62645				

Der in vorliegender Tabelle ausgeführten Rechnung zufolge geht die die Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten ausdrückende Gerade durch einen Punkt, dessen Coordinaten 0,23646 und 0,62645 sind, und aus den Summen der drei letzten Columnen dieser Tabelle ergibt sich die Neigung Θ dieser Geraden gegen die Abscissenaxe durch die Formel

$$\operatorname{tang} 2\,\Theta = \frac{2\,\Sigma(uv)}{\Sigma(u^2) - \Sigma(v^2)} = -\frac{2.\ 0{,}0044411}{0{,}060436 - 0{,}0004438} = -\frac{0{,}0088822}{0{,}059992} = -0{,}14806,$$

folglich

$$2\,\Theta = -\,8^\circ\ 25'\ 19'',$$
$$\Theta = -\,4^\circ\ 12'\ 40''.$$

Lassen wir auch hier wegen Raumersparung die 6 Zehntel im Ausflusscoefficienten weg, so bekommen wir die in Frage befindlichen Parameter der durch die Gleichung $\frac{w}{p} + \frac{z}{q} = 1$ gegebenen Linie:

$$p = 0{,}23646 + 0{,}02645 \operatorname{cotg.} 4^\circ\ 12'\ 40'' = 0{,}59568, \text{ und}$$
$$q = 0{,}02645 + 0{,}23646 \operatorname{tg.} 4^\circ\ 12'\ 40'' = 0{,}04386.$$

Die Gleichung der Linie ist hiernach

$$\frac{w}{0{,}59568} + \frac{z - 0{,}6}{0{,}04386} = 1, \text{ und sonach}$$
$$z = 0{,}64386 - 0{,}07363\,w, \text{ oder}$$
$$z = 0{,}64386 - 0{,}007363\,w,$$

wenn w in Centimetern gegeben wird.

Die Linie selbst wird durch den über ABC hingehenden punktirten Zug auf der Tafel No. III. vor Augen geführt; man sieht, dass von den Punkten der Beobachtung vier nahe über, drei unter und drei fast ganz in demselben liegen.

Für eine Mündung von 2,3 Centimeter Durchmesser wäre hiernach der Ausflusscoefficient $y = 0{,}64386 - 0{,}007363.\ 2{,}3 = 0{,}627$. Dieser Werth gilt jedoch nur für eine Druckhöhe von

0,22 bis 0,24 Meter. Sollte diese aber 0,35 Meter betragen, so müsste der Ausflusscoefficient interpolirend bestimmt werden. Da oben für dieselbe Mündung bei 0,57 bis 0,58 Meter Druckhöhe dieser Coefficient $= 0{,}619$ gefunden wurde, so setzen wir ihn $= 0{,}619 + \frac{0{,}575 - 0{,}350}{0{,}575 - 0{,}230}(0{,}627 - 0{,}619)$ $= 0{,}619 + 0{,}005 = 0{,}624$.

Statt der Berechnung kann man sich folgender Tabelle bedienen.

Tabelle XIV.

Die Ausflusscoefficienten für kreisförmige Mündungen von 1 bis 4 Centimeter Durchmesser bei vollkommener Contraction und kleinerem Drucke.

Ganze.	Zehntel. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,637	0,636	0,635	0,634	0,634	0,633	0,632	0,631	0,631	0,630
2	0,629	0,628	0,628	0,627	0,626	0,625	0,625	0,624	0,623	0,623
3	0,622	0,621	0,620	0,620	0,619	0,618	0,617	0,617	0,616	0,615

Aus den gefundenen Curven, welche durch ihren Lauf die von der Mündungsweite abhängige Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction ausdrücken, kann man nun durch Benutzung der Tabelle No. IX. die nahe an AB_1C_1 hinlaufenden punktirten und gestrichelten Linien finden, welche das gesetzmässige Wachsen der entsprechenden Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction repräsentiren. Bei dieser Bestimmung haben wir aber der Einfachheit wegen angenommen, dass bei der Mündung von 4 Centimeter Durchmesser (anstatt 3,965 Centimeter) alle Contraction aufhöre, hiernach denn auch für den Schluss der Versuchsreihe bei der grösseren Druckhöhe

$$\mu = 0{,}63426 - 0{,}006637 . 4 = 0{,}6077,$$

und bei der kleineren Druckhöhe

$$\mu = 0{,}64386 - 0{,}007363 . 4 = 0{,}6144$$

gesetzt, und endlich wegen der Abweichungen von dem bei der Construction der Tabelle zum Grunde gelegten Werthe $\mu = 0{,}6132$ die nöthigen Correctionen an den Werthen dieser Tabelle vorgenommen.

Diese Correction selbst ist nach einer früheren Bestimmung:

$$y_1 - y = -\frac{0{,}3941\,(\mu - 0{,}6132)\,x^2}{(1 - 0{,}6059\,x)\,\mu^2},$$

also wenn wir μ einmal $= 0{,}6077$ und ein zweites Mal $= 0{,}6144$ setzen, für den ersten Fall

$$y_1 - y = \frac{0{,}3941 .\ 0{,}0055 .\ x^2}{(1 - 0{,}6059\,x)\,(0{,}6077)^2} = \frac{0{,}005869\,x^2}{1 - 0{,}6059\,x}$$

und für den zweiten Fall

$$y_1 - y = -\frac{0{,}3941 .\ 0{,}0012\,x^2}{(1 - 0{,}6059\,x)\,(0{,}6144)^2} = -\frac{0{,}001253\,x^2}{1 - 0{,}6059\,x}.$$

Benutzt man die Tabelle No. X., worin für jeden Werth von x der entsprechende Werth von $\psi = \frac{0{,}3941\,x^2}{1 - 0{,}6059\,x}$ zu finden ist, so findet man einfacher

$$y_1 - y = 0{,}01489\,\psi \text{ und}$$
$$y_1 - y = -0{,}00318\,\psi.$$

Hat man mittels eines der so gefundenen Werthe die einem gegebenen Querschnittsverhältnisse x entsprechende Zahl y aus der Tabelle No. IX. entnommen, so findet man endlich den entsprechenden Ausflusscoefficienten durch die Formel

$$\mu_x = (1 + y)\,\mu,$$

wie durch folgendes Beispiel noch mehr erläutert werden möge.

Es sei z. B. der Ausflusscoefficient für die 3,2 Centimeter weite Mündung bei grösserem Drucke und bei kleinerem Drucke zu finden.

Dieser Mündung entspricht der relative Querschnitt $x = \left(\frac{32}{40}\right)^2 = 0{,}64$; deshalb ist in dem einen Falle

$$y_1 - y = \frac{0{,}005869.\ (0{,}64)^2}{1 - 0{,}6059.\ 0{,}64} = 0{,}004,$$

und in dem anderen

$$= -\frac{0{,}001253.\ (0{,}64)^2}{1 - 0{,}6059.\ 0{,}64} = -\ 0{,}001.$$

Nun gibt aber die Tabelle No. IX. für $x = 0{,}64$, $y = 0{,}211$, demnach haben wir in dem einen Falle $y_1 = 0{,}211 + 0{,}004 = 0{,}215$ und im zweiten $y_1 = 0{,}211 - 0{,}001 = 0{,}210$ zu setzen.

Endlich sind für $w = 3{,}2$ nach den Formeln

$$z = 0{,}63426 - 0{,}006637.\ w \text{ und}$$
$$z = 0{,}64386 - 0{,}007363.\ w$$

die Ausflusscoefficienten der vollkommenen Contraction

$$z = 0{,}6129 \text{ und } z = 0{,}6203,$$

daher folgen denn die entsprechenden Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction ($x = 0{,}64$)

$$\mu_{0{,}64} = 1{,}215.\ 0{,}6129 = 0{,}7447 \text{ bei grösserer Druckhöhe, und}$$
$$\mu_{0{,}64} = 1{,}210.\ 0{,}6203 = 0{,}7505 \text{ bei kleinerer Druckhöhe.}$$

Auf dieselbe Weise sind die Coordinaten mehrerer Punkte der Linien gefunden und hiernach diese auf die Tafel aufgetragen worden. Die dadurch erhaltenen Curven ziehen sich, wie man sieht, ohne bedeutende Abweichungen zwischen den Punkten der Beobachtungen hindurch. Da wir in der graphischen Darstellung statt der Röhrenweite 3,965 Centimeter eine von 4 Centimeter eingeführt haben, so liegen die Punkte für die Beobachtungen bei unvollkommener Contraction etwas zurück gegen die entsprechenden Punkte der Beobachtungen bei vollkommener Contraction.

Die Versuche über den Ausfluss bei unvollkommener Contraction sind bei verschiedenen Mündungsweiten, denen verschiedene Ausflusscoefficienten auch bei vollkommener Contraction entsprechen, angestellt worden, deshalb enthalten auch die erhaltenen Resultate noch ein veränderliches Element, welches wir noch entfernen müssen. Wir haben für die grössere Druckhöhe

$$z = 0{,}6343 - 0{,}00664.\ w$$

und für die kleinere

$$z = 0{,}6439 - 0{,}00736.\ w,$$

wo w den Durchmesser und z den entsprechenden Ausflusscoefficienten bezeichnet, gefunden.

Nun hat sich aber für $w = 4$ Centimeter bei den Untersuchungen über unvollkommene Contraction $z = 0{,}6132$ ergeben, daher müssen wir für diese mittlere Druckhöhe

$$z = 0{,}6421 - 0{,}00723.\ w$$

annehmen.

Setzen wir nun die relativen Querschnitte $x = 0{,}01$, $0{,}02$, $0{,}03$ u. s. w. bis $0{,}99$, also die entsprechenden Durchmesser $= 0{,}40$, $0{,}57$, $0{,}69$ u. s. w. bis 3,98 Centimeter, und berechnen wir hieraus mit Hilfe der letzten Formel die entsprechenden Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction, so gelangen wir zu denjenigen Werthen von μ, welche den von der Tabelle No. IX. angegebenen Werthen der Correctionen y wegen der unvollkommenen Contraction entsprechen, und es lassen sich nun mit Benutzung der Tabelle No. X. diese Werthe auf einerlei, z. B. auf den mittleren Ausflusscoefficienten $\mu = 0{,}6132$ reduciren. Z. B. für $x = 0{,}64$ ist $w = 4.\ 0{,}8 = 3{,}2$, daher $z = 0{,}6421 - 0{,}00723.\ 3{,}2 = 0{,}6190$. Die Abweichung dieses Werthes von dem mittleren Coefficienten $\Delta\mu$ ist $= 0{,}6190 - 0{,}6132 = 0{,}0058$ und die Tabelle No. X. gibt für $x = 0{,}64$, $\psi = 0{,}70$, daher folgt $\Delta y = \psi.\ \Delta\mu = 0{,}0058.\ 0{,}7 = 0{,}004$, es ist mithin, wenn man für den Ausflusscoefficienten 0,6132 bei vollkommener Contraction die Correction wegen unvollkommener Contraction beim Querschnittsverhältnisse $x = 0{,}64$ wissen will, der von der Tabelle No. IX. angegebene Werth $y = 0{,}211$ um 0,004 zu vergrössern, also $y = 2{,}215$ und $y = 1{,}215.\ \mu = 1{,}215.\ 0{,}6190 = 0{,}752$ zu setzen. Auf diese Weise lassen sich alle Werthe von y in Tabelle No. IX. verbessern, und es ist hiernach folgende allgemein anwendbare Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle XV.

Die Correctionen der Ausflusscoefficienten wegen unvollkommener Contraction, den mittleren Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction = 0,6132 gesetzt.

	Zehntel.									
Hundertel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,014	0,034	0,059	0,092	0,134	0,189	0,260	0,351	0,471
1	0,001	0,016	0,036	0,063	0,096	0,139	0,196	0,268	0,362	0,486
2	0,002	0,017	0,038	0,066	0,101	0,144	0,202	0,276	0,373	0,500
3	0,004	0,019	0,040	0,069	0,105	0,149	0,208	0,285	0,384	0,515
4	0,005	0,021	0,043	0,072	0,108	0,155	0,215	0,294	0,396	0,530
5	0,007	0,023	0,045	0,075	0,112	0,161	0,223	0,303	0,408	0,546
6	0,008	0,025	0,048	0,078	0,116	0,166	0,230	0,312	0,419	0,561
7	0,009	0,027	0,050	0,081	0,120	0,172	0,237	0,321	0,432	0,578
8	0,011	0,029	0,053	0,085	0,125	0,178	0,244	0,331	0,445	0,595
9	0,012	0,031	0,056	0,088	0,129	0,183	0,252	0,341	0,458	0,612

In der Regel wird diese Tafel in Fällen der Praxis vollkommen ausreichen, namentlich wenn der gegebene Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction nicht sehr von dem mittleren Coefficienten 0,6132 abweicht; will man aber genauer rechnen, oder ist der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction bedeutend von 0,6132 verschieden, so kann man mit Zuhilfeziehung der Tabelle No. X. leicht die nöthige Correction finden. Wäre z. B. $\mu = 0{,}6000$, also $\Delta\mu = 0{,}6000 - 0{,}6132 = -0{,}0132$, und sollte für $x = 0{,}53$ der Ausflusscoefficient gefunden werden, so hätte man zunächst aus der Tabelle No. X. wegen 0,53 die Zahl $\psi = 0{,}43$ zu entnehmen, und nun das Product $\psi\Delta\mu = -0{,}43.\ 0{,}0132 = -0{,}006$ von dem aus der letzten Tabelle genommenen Werthe von

$y = 0{,}149$ abzuziehen, also $y_1 = 0{,}149 - (-0{,}006) = 0{,}155$ zu setzen. Der gesuchte Ausflusscoefficient wäre hiernach

$$\mu_{0,43} = (1 + y_1)\,\mu = 1{,}155 .\, 0{,}6 = 0{,}693.$$

Wäre hingegen unter übrigens gleichen Verhältnissen der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction $\mu = 0{,}625$, also $\Delta\mu = 0{,}6250 - 0{,}6132 = 0{,}0118$, so hätte man

$$\Delta y = \psi .\, \Delta\mu = 0{,}43 .\, 0{,}0118 = 0{,}005, \text{ und deshalb}$$
$$y_1 = 0{,}149 - 0{,}005 = 0{,}144, \text{ endlich}$$
$$\mu_{0,43} = 1{,}144 .\, 0{,}625 = 0{,}715.$$

Ohne Correctionen (Δy) hätte man im ersten Falle $\mu_{0,43} = 1{,}149 .\, 0{,}6 = 0{,}689$ und im zweiten $\mu_{0,43} = 1{,}149 .\, 0{,}625 = 0{,}718$ bekommen.

Die nach der Formel $x = 0{,}6421 - 0{,}00723 .\, w$ construirte Curve der Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction wird durch den Zug ABC und die hiernach bestimmte Curve der Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction durch AB_1C_1 Taf. III. vorgestellt. Den unveränderlichen Ausflusscoefficienten 0,6132 bei vollkommener Contraction schneidet die stark ausgezogene Gerade DEC ab, und die ihm entsprechenden Ausflusscoefficienten bei unvollkommener Contraction gibt die Curve DE_1C_1 an.

γ) Ausmittelung der Contractions- und Geschwindigkeitscoefficienten bei vollkommener und unvollkommener Contraction.

Die Ausflusscoefficienten sind als Producte aus Contractions- und Geschwindigkeitscoefficienten anzusehen; man hat daher durch die obigen Untersuchungen nur die aus zwei Factoren bestehenden Producte, keinesweges aber die Factoren selbst bestimmt. Um diese auszumitteln, sind vielmehr noch besondere Versuche nöthig gewesen. Zwei Wege standen uns hierzu offen, entweder die Sprungweite zu messen und aus dieser, wie es *d'Aubuisson* und *Castel* gethan haben, die effective Geschwindigkeit zu beerchnen, oder eine Messung der Strahlendicke an der Stelle der grössten Contraction vorzunehmen und hieraus die Grösse der Contraction zu berechnen. Abgesehen davon, dass wenigstens bei dickeren Strahlen und kleineren Geschwindigkeiten die Messung der Sprungweite viel Unsicherheit zurücklässt, so konnte schon aus dem Grunde dieser Weg nicht gut eingeschlagen werden, weil wir das Wasser nicht bei constantem, sondern bei abnehmendem Drucke, also auch bei immer kleiner und kleiner werdender Geschwindigkeit ausfliessen liessen. Es veränderte sich also bei diesen Versuchen die Sprungweite unaufhörlich und man hätte dieselbe in dem Augenblicke, wenn die Ausflussgeschwindigkeit ihren mittleren Werth erreicht hat, messen müssen, was, wie wir selbst versucht haben, ohne vielfache Wiederholung eines und desselben Versuches kaum möglich ist. Es blieb uns deshalb nur noch das Ausmessen der Dicke des contrahirten Wasserstrahles übrig, was zwar ebenfalls seine Schwierigkeit hat, weil die Contraction während des Ausflusses bei abnehmender Druckhöhe sich ebenfalls verändert; da indessen diese Veränderlichkeit sehr klein ist, so kam es hier nicht darauf an, genau in dem Augenblicke zu messen, wenn die Ausflussgeschwindigkeit die mittlere war.

Diese Strahlenmessungen lassen allerdings eine grosse Schärfe nicht zu, da wir dieselben aber in nicht geringer Anzahl vorgenommen haben, so lässt sich erwarten, dass wenigstens der aus ihnen berechnete mittlere Werth die erwünschte Genauigkeit gewähre. Der zu diesen Messungen angewendete Apparat ist bereits in der Einleitung beschrieben worden. Es lässt sich leicht einsehen, dass diese Methode der Strahlenmessung noch weit mehr Schärfe verspricht als die Messung mit dem Tastzirkel, wie sie von Anderen vorgenommen wurde. Diese Strahlenmessungen wurden in der Regel nur beim Ausflusse unter grösserem Drucke, in dem Augenblicke, wenn das Wasser 0,57 bis 0,58 Meter über der Mitte der Ausmündung stand, ausgeführt, und nur wenige Versuche der Art wurden auch bei kleineren Druckhöhen, wo sich allerdings ein elliptischer Querschnitt bemerklich machte, angestellt. Noch dürfen wir nicht unerwähnt lassen, dass diese Messungen bei dem Ausflusse mit vollkommener Contraction weit sicherer auszuführen waren als die beim Ausflusse mit unvollkommener Contraction. Während bei jenem Ausflusse das Wasser ganz klar und ruhig ausfloss, war der Strahl bei diesem getrübt und in Pulsationen begriffen, was, zumal bei grösseren Mündungen (grösserem $\frac{a}{a_1}$), die Messungen erschwerte, da sich die Welle, welche die die Oberfläche des Strahles berührende Messingdrahtspitze bildete, nicht gut beobachten und die Coincidenz beider nicht leicht herbeiführen liess, indem der Strahl bald die Spitze streifte, bald aber sich auch wieder davon trennte. Bei kleineren Mündungen, wo der Strahl noch ziemlich hell und ruhig ausfloss, war diese Schwierigkeit weit kleiner und deshalb auch die Messung weit sicherer.

Die Resultate dieser Strahlenmessungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle XVI.

1) Strahlenmessungen bei vollkommener Contraction.

Nummer der Beobachtung.	Durchmesser der Mündung in Centimetern.	Dicke des contrahirten Wasserstrahles in Centimetern.	Contractions-coefficient α.	Ausfluss-coefficient μ.	Geschwindigkeits-coefficient φ.
1	0,866	0,720	0,691	0,659	0,954
3	1,234	1,025	0,670	0,628	0,937
4	1,512	1,212	0,643	0,626	0,974
5	1,742	1,385	0,632	0,624	0,987
6	1,967	1,555	0,625	0,619	0,990
7	2,117	1,710	0,652	0,612	0,939
8	2,348	1,846	0,619	0,606	0,979
9	2,490	2,021	0,659	0,619	0,939
10	2,666	2,167	0,661	0,617	0,933
11	2,878	2,275	0,625	0,619	0,990
12	3,075	2,439	0,629	0,614	0,976
18	3,965	3,186	0,646	0,608	0,941
—	3,328	2,661	0,639	0,609	0,953
—	3,584	2,838	0,627	0,610	0,973

Mittel: $\varphi = 0,961$.

Tabelle XVII.

2) Strahlenmessungen bei unvollkommener Contraction.

Nummer der Beobachtung.	Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	Durchmesser der Mündung in Centimetern.	Dicke des contrahirten Wasserstrahles.	Contractionscoefficient α.	Ausflusscoefficient μ.	Geschwindigkeitscoefficient φ.
4	0,141	1,512	1,229	0,661	0,634	0,959
5	0,187	1,742	1,404	0,650	0,640	0,986
6	0,238	1,967	1,602	0,663	0,646	0,974
7	0,276	2,117	1,743	0,678	0,647	0,954
8	0,339	2,348	1,919	0,668	0,651	0,975
9	0,381	2,490	2,115	0,721	0,675	0,936
10	0,437	2,666	2,266	0,722	0,691	0,957
11	0,509	2,878	2,465	0,734	0,696	0,944
12	0,582	3,075	2,663	0,750	0,721	0,961
13	0,651	3,253	2,921	0,806	0,750	0,931
14	0,712	3,403	3,056	0,806	0,767	0,952
15	0,795	3,596	3,274	0,829	0,809	0,976
16	0,834	3,683	3,393	0,849	0,828	0,975
17	0,864	3,748	3,350	0,887	0,868	0,979
						Mittel: $\varphi = 0{,}961$.

So verschieden auch die Geschwindigkeitscoefficienten $\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$ ausgefallen sind, so ergeben doch beide Versuchsreihen einerlei mittleren Werth 0,961 für dieselben, und es möchte deshalb, so lange nicht andere umständlich und schärfer ausgeführte Messungen vorliegen, gerathen sein, in allen Fällen, sowohl bei der vollkommenen als auch bei der unvollkommenen Contraction, den Geschwindigkeitscoefficienten

$$\varphi = 0{,}961 \text{ oder, der Kürze wegen, } = 0{,}96$$

anzunehmen.

Diese Beständigkeit des Geschwindigkeitscoefficienten oder des Verhältnisses zwischen der effectiven und hypothetischen Ausflussgeschwindigkeit bedingt eine Veränderlichkeit des Contractionscoefficienten, für den wir nun

$$\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 1{,}0406\,\mu \text{ oder kürzer } = 1{,}04\,\mu$$

setzen können.

Kennt man für einen gewissen Fall den Ausflusscoefficienten, ist er z. B. 0,6132, so bestimmt sich hieraus sehr leicht der entsprechende Contractionscoefficient; er ist z. B. für diesen Werth $= 1{,}0406 . 0{,}6132 = 0{,}6381$ oder 0,638.

Es findet also hiernach bei dem Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand unter allen Umständen ein Geschwindigkeitsverlust von *circa* 4 Procent statt und diesem entspricht wieder der Gefäll- oder Druckhöhenverlust

$$(1 - (0{,}961)^2)\frac{v^2}{2g} = (1 - 0{,}9235)\frac{v^2}{2g} = 0{,}0765 . \frac{v^2}{2g}$$

von $7\frac{2}{3}$ Procent.

Der Widerstandscoefficient (ζ) oder derjenige Theil der Druckhöhe, welcher wegen Ueberwindung der Hindernisse verloren geht, ist hiernach allgemein für den Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand bei vollkommener und unvollkommener Contraction

$$\zeta = 0{,}0765.$$

Diesem Coefficienten proportional ist auch der Verlust an mechanischer Leistung; während eine Wassermenge m in einem Reservoir eine mechanische Arbeit $hm\gamma$, wo γ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bezeichnet, verrichten kann, hat sie beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand desselben vermöge ihrer lebendigen Kraft nur noch das Vermögen, eine mechanische Arbeit 0,9235. $hm\gamma$ zu verrichten, hat also an dieser 0,0765 $hm\gamma$ verloren.

Hiernach wird demnach in den Fällen, wo das Wasser durch seine lebendige Kraft eine Maschine in Umtrieb setzt, durch die Schutzvorrichtung allein schon $7\frac{3}{4}$ Procent an mechanischer Leistung consumirt. Dieser Kraftverlust findet selbst dann noch statt, wenn man durch Abrundung und kurze Ansätze die Contraction ganz aufhebt, wie in den unten folgenden Nebenversuchen gefunden wird.

Die letzten Messungen konnten allerdings nicht ganz genau ausgeführt werden, und deshalb möchten auch die erhaltenen Resultate noch einiges an Schärfe übrig lassen; um ganz genaue Resultate zu erlangen, wäre vorzüglich noch nöthig gewesen, die Strahlendicke in verschiedenen Abständen von der Mündung zu messen, wie es *Poncelet* und *Lesbros* bei einer vierseitigen Mündung gethan haben. Wir haben allerdings immer in derjenigen Entfernung ($\frac{1}{2}$ bis 1 mal Mündungsweite) gemessen, wo uns die grösste Contraction zu sein schien, allein das Auffinden dieser Stelle mit dem blossen Auge lässt immer noch einige Unsicherheit zurück.

---

b) Ausfluss unter Wasser.

Bei den Versuchen über den Ausfluss des Wassers unter Wasser wurde ein parallelepipedischer Kasten von 1,25 Meter Länge, 0,6 Meter Breite und 0,3 Meter Tiefe so vor das Ausflussreservoir gestellt, dass das Messingrohr oder, nach Befinden, die an dasselbe angestossene Eisenröhre 5 Centimeter über dem Boden in demselben einmündete und das Wasser *circa* 25 Centimeter hoch über der Einmündung stand. Das Wasser in dieser Vorlage blieb während des Ausflusses bei kleinen Ausflussmündungen fast ganz ruhig, gerieth wenigstens nur bei grösseren Mündungen in Wallungen. Der Abfluss fand am ganzen Umfang des Kastens statt.

Die hiermit angestellten Versuche sind folgende.

Mündung No. 3 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Durchmesser dieser Mündung = 1,234 Centimeter.

Inhalt derselben $a = 1{,}19597$ Quadratcentimeter.

Anfänglicher Niveauabstand $h_1 = 0{,}5815$ Meter.

Niveauabstand am Ende des Versuches $h_2 = 0{,}2020$ Meter.

Mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2 = 0{,}3675 \text{ Meter.}$$

Ausflusszeit $\tau = 831,5$ Secunden.

Entsprechender Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{2A(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{a\tau\sqrt{2g}} = 0,19837. \frac{\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}}{a\tau} = 0,6246,$$

Ausdruck $\frac{1}{\mu^2} = 2,5631$.

Für den Ausfluss durch das blosse Rohr unter Wasser war $\tau = 54,4$ Sec., weshalb sich hier

$\mu_1 = 0,8943$ und

$\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,2504$

herausstellt.

Der Widerstand des Rohres ist hiernach $= 0,2504 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2504 . 0,00877 = 0,0022$, daher folgt der Ausflusscoefficient für die Mündung allein:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,5631 - 0,0022}} = 0,6249.$$

Mündung No. 4 (in der Ausmündung der Eisenröhre).

Hier ist $d = 1,512$ Centimeter, $a = 1,79553$ Quadratcentimeter, $\frac{a}{a_1} = 0,13992$ und $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,01958$.

Druckhöhen oder Niveauabstände: $h_1 = 0,5755$, $h_2 = 0,1965$, $h = 0,3611$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 552$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0,6312$.

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,5103$.

Die Röhre ohne Mundstück gab $\tau = 62,25$ Secunden, deshalb $\mu_1 = 0,7831$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,6305$, endlich $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6305 . 0,01958 = 0,0123$.

Für die Mündung allein folgt nun

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,5103 - 0,0123}} = 0,6327.$$

Mündung No. 5 (in der Ausmündung der Eisenröhre).

Hier ist $d = 1,742$ Centimeter, $a = 2,38334$ Quadratcentimeter, $\frac{a}{a_1} = 0,18573$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,03450$.

Die Druckhöhen sind: $h_1 = 0,5785$, $h_2 = 0,1950$, $h = 0,3613$ Meter, die Ausflusszeit $\tau = 423,25$ Secunden.

Hiernach folgt $\mu_2 = 0,6273$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,5410$.

Ausfluss durch die blosse Röhre: $\tau = 62,5$ Sec., $\mu_1 = 0,7890$, $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1,6062$, $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6062 . 0,0345 = 0,0209$, endlich der gesuchte Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,5410 - 0,0209}} = 0,6299.$$

Mündung No. 6 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Es ist $d = 1{,}967$ Centimeter, $a = 3{,}0388$ Quadratcentimeter, $\frac{a}{a_1} = 0{,}2380$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}05664$.

Die Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5755$, $h_2 = 0{,}1932$, $h = 0{,}3589$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 326{,}5$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0{,}6451$.

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}4011$.

Für die Röhre allein war $\tau = 60{,}5$ Secunden, daher $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}4894$, demnach $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4894 . 0{,}05664 = 0{,}0279$; endlich folgt

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}4011 - 0{,}0279}} = 0{,}6491.$$

Mündung No. 9 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Für diese ist $d = 2{,}490$ Centimeter, $a = 4{,}8695$ Quadratcentimeter, $\frac{a}{a_1} = 0{,}38139$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}14545$.

Die Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5785$, $h_2 = 0{,}1995$, $h = 0{,}3646$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 197$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0{,}6492$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}3727$.

Das Rohr allein gab $\tau = 59$ Secunden, daher ist $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}4631$; $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4631 . 0{,}14545 = 0{,}0673$, endlich der Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}3727 - 0{,}0673}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}3054}} = 0{,}6586.$$

Mündung No. 10 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Durchmesser dieser Mündung $d = 2{,}666$ Centimeter, Inhalt derselben $a = 5{,}5823$ Quadratcentimeter, $\frac{a}{a_1} = 0{,}43727$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}19115$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5815$, $h_2 = 0{,}2020$, $h = 0{,}3675$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 165{,}25$ Secunden.

Hiernach folgt $\mu_2 = 0{,}6734$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2055$.

Für die Röhre allein war $\tau = 54{,}25$ Secunden, weshalb folgt $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}2435$; $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2435 . 0{,}19115 = 0{,}0465$, endlich der Ausflusscoefficient für die blosse Mündung

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}2055 - 0{,}0465}} = 0{,}6806.$$

Mündung No. 11 (in der Ausmündung der Eisenröhre).

Durchmesser dieser Mündung $d = 2{,}878$ Centimeter, Inhalt derselben $a = 6{,}5054$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}50696$, Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}25701$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5755$, $h_2 = 0{,}1965$, $h = 0{,}3611$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 144{,}5$ Secunden.

Hiernach $\mu_2 = 0{,}6655$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2581$.

Noch ist $\zeta = 0{,}6305$, daher folgt $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1621$, und der gesuchte Coefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}2581 - 0{,}1621}} = 0{,}6907.$$

Mündung No. 12 (in der Ausmündung der Eisenröhre).

Durchmesser $d = 3{,}075$ Centimeter, Inhalt derselben: $a = 7{,}4264$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}57874$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}33494$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5785$, $h_2 = 0{,}1950$, $h = 0{,}3613$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 125{,}25$ Secunden.
Berechneter Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0{,}6803$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}1605$.

Nun ist aber $\zeta = 0{,}6062$, also $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2051$, daher folgt der Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1605 - 0{,}2051}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}9554}} = 0{,}7151.$$

Mündung No. 13 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Durchmesser $d = 3{,}2535$ Centimeter, Inhalt $a = 8{,}3137$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}65113$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}42397$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5790$, $h_2 = 0{,}2000$, $h = 0{,}3649$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 107{,}25$ Secunden.
Entsprechender Coefficient $\mu_2 = 0{,}6979$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}0528$.

Für das Rohr allein $\zeta = 0{,}4653$, daher $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1973$, und der gesuchte Coefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}0528 - 0{,}1973}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}8555}} = 0{,}7341.$$

Mündung No. 14 (in der Ausmündung des Messingrohres).

Durchmesser $d = 3{,}403$ Centimeter, Inhalt $a = 9{,}0952$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}71235$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}50744$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5815$, $h_2 = 0{,}2020$, $h = 0{,}3675$ Meter.
Ausflusszeit: $\tau = 90{,}25$ Secunden.
Entsprechende Werthe $\mu_2 = 0{,}7567$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}7463$.

Für den Widerstandscoefficienten des blossen Rohres ist $\zeta = 0{,}2435$, daher $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2435 . 0{,}5074 = 0{,}1235$; demnach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}6228}} = 0{,}7850.$$

Bei dem Ausflusse durch diese und durch die grösseren Mündungen No. 15, 16 und 17 war das Wasser in der Vorlage so unruhig, dass auf eine erträgliche Sicherheit bei denselben nicht zu rechnen ist. Fassen wir daher nur die Ergebnisse der oben angeführten 10 Versuche mit den Mündungen No. 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13 und 14 zusammen, und vergleichen wir dieselben mit den Resultaten, welche wir über den Ausfluss in die freie Luft erhalten haben.

Man sieht sogleich, dass auch beim Ausflusse unter Wasser die Ausflusscoefficienten mit der relativen Grösse der Mündung zunehmen, und muss deshalb annehmen, dass auch hier die Contraction des ausfliessenden Strahles immer schwächer und schwächer wird, je schneller das Wasser an der Ausflussmündung ankommt. Vergleicht man aber diese Ausflusscoefficienten mit denen beim Ausfluss in die freie Luft genauer, so findet man allerdings, dass eine Abweichung übrig bleibt, dass nämlich fast bei allen Beobachtungen der Ausflusscoefficient beim Ausfluss unter dem Wasser kleiner ausfällt, als beim Ausfluss in die freie Luft. Diese Verminderung der Ausflussmenge beim Ausflusse unter Wasser hat muthmasslich in dem Widerstande, welchen das Wasser in der Vorlage dem durchgehenden Strahl entgegensetzt, ihren Grund, und ist deshalb wohl mehr einer Abnahme des Geschwindigkeitscoefficienten als einer solchen im Contractionscoefficienten beizumessen.

Da die Ausflusscoefficienten für einerlei Mündung auch noch verschieden sind bei verschiedenen Druckhöhen, so würde allerdings die Vergleichung der Ausflusscoefficienten beim Ausflusse in die Luft und unter Wasser Versuche bei einerlei Druckhöhe voraussetzen; weil aber den Versuchen unter mittlerem Drucke beim Ausfluss in die freie Luft eine Druckhöhe von 0,40 bis 0,41 Meter zukommt und die mittlere Druckhöhe für die Versuche über den Ausfluss unter Wasser 0,36 bis 0,37 Meter beträgt, so ist ein grosser Fehler nicht zu befürchten, wenn wir die Resultate der Versuche über den Ausfluss unter Wasser mit denen, welche über den Ausfluss in freier Luft bei mittlerem Drucke angestellt worden sind, unmittelbar vergleichen. Die Ergebnisse dieser Vergleichung sind in folgender Tabelle neben einander gestellt.

Tabelle XVIII.

Nummer der Mündung.	Durchmesser der Mündung.	Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	Ausflusscoefficient für den Ausfluss in die Luft.	Ausflusscoefficient für den Ausfluss ins Wasser.	Verhältniss der Ausflusscoefficienten.
3	1,234	0,0937	0,6413	0,6249	0,974
4	1,512	0,1399	0,6327	0,6327	1,000
5	1,742	0,1857	0,6418	0,6299	0,981
6	1,967	0,2380	0,6495	0,6491	1,000
9	2,490	0,3814	0,6780	0,6586	0,971
10	2,666	0,4373	0,6911	0,6806	0,985
11	2,878	0,5070	0,7037	0,6907	0,982
12	3,075	0,5787	0,7257	0,7151	0,985
13	3,2535	0,7123	0,7531	0,7341	0,975
14	3,403	0,7954	0,7763	0,7850	1,011

Mittleres Verhältniss der Ausflusscoefficienten: 0,9864.

Wenn nun auch diese Versuche über den Ausfluss unter Wasser nicht in ausgedehnter Anzahl und wohl auch nicht mit grosser Genauigkeit angestellt worden sind, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit aus denselben folgern, dass der Ausflusscoefficient beim Ausflusse unter Wasser wegen der Klebrigkeit des Wassers um 1 — 0,9864 = 0,0136 oder *circa* um 1½ Procent kleiner ist als beim Ausflusse in die freie Luft.

---

9) Ausfluss durch rectanguläre Mündungen.

Um auch den Einfluss der unvollkommenen Contraction beim Ausfluss durch vierseitige Mündungen kennen zu lernen, wurden mit folgenden fünf rectangulären, in Messingblech ausgeschnittenen Mundstücken Versuche angestellt.

Mündung No. 1. Diese hatte eine Länge von 2,020 Centimeter und eine Höhe von 0,976 Centimeter, daher den Inhalt $a = 1{,}9715$ Quadratcentimeter.

Mündung No. 2. Länge derselben = 2,222, Höhe = 1,120 Centimeter, Inhalt $a = 2{,}4886$ Quadratcentimeter.

Mündung No. 3. Länge = 2,444, Breite = 1,177 Centimeter, Inhalt $a = 2{,}8766$ Quadratcentimeter.

Mündung No. 4. Länge = 2,812, Breite = 1,337 Centimeter, Inhalt $a = 3{,}7596$ Quadratcentimeter.

Mündung No. 5. Länge = 3,568 Centimeter, Breite = 1,7293, Inhalt $a = 6{,}1701$ Quadratcentimeter.

Mündung No. 6. Länge = 5,052, Breite = 2,505 Centimeter, Inhalt derselben $a = 12{,}655$ Quadratcentimeter.

Diese Mündungen wurden erst in die grosse ebene Wandfläche und dann noch in die Ausmündung eines 5 Centimeter weiten, 2½ Centimeter hohen und 32 Centimeter langen parallelepipedischen, in den Wasserkasten einmündenden Messingrohres eingesetzt, um nicht allein den Ausfluss

bei vollkommener, sondern auch den bei unvollkommener Contraction kennen zu lernen. Was nun zunächst den Ausfluss durch die in der grossen ebenen Wand befindliche Mündung, wobei vollkommene Contraction statt hat, anlangt, so wurden hierüber folgende Beobachtungen gemacht.

Mündung No. 1. $a = 1{,}9715$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7863$, $h_2 = 0{,}4039$, $h = 0{,}5793$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 408$ Sec.
Hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6195$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6395$, $h_2 = 0{,}2413$, $h = 0{,}4166$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 498$ Sec.
Hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6234$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4039$, $h_2 = 0{,}1143$, $h = 0{,}2370$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 476$ Sec.
Hiernach bestimmter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6291$.
Mittel aus diesen drei Ausflusscoefficienten $= 0{,}6240$.

Mündung No. 2. $a = 2{,}4886$ Quadratcentimeter.

Ausfluss bei grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7844$, $h_2 = 0{,}4020$, $h = 0{,}5774$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 312$ Sec.
Hiernach bestimmter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6429$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6376$, $h_2 = 0{,}2394$, $h = 0{,}4146$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 380$ Secunden.
Hiernach bestimmter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6488$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4020$, $h_2 = 0{,}1124$, $h = 0{,}2349$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 363$ Secunden.
Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6564$.
Mittel aus diesen drei Ausflusscoefficienten $= 0{,}6494$.

Mündung No. 3. $a = 2{,}8766$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7846$, $h_2 = 0{,}4022$, $h = 0{,}5775$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 266{,}5$ Sec.
Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6510$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6378$, $h_2 = 0{,}2396$, $h = 0{,}4148$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 325$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6561$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4022$, $h_2 = 0{,}1126$, $h = 0{,}2351$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 311$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6625$ Secunden.

Mittel aus allen drei Ausflusscoefficienten $= 0{,}6565$.

Mündung No. 4. $a = 3{,}7596$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7833$, $h_2 = 0{,}4009$, $h = 0{,}5762$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 212{,}3$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6260$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6365$, $h_2 = 0{,}2383$, $h = 0{,}4134$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 259$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6310$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4009$, $h_2 = 0{,}1113$, $h = 0{,}2336$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 248$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6376$.

Mittel aus den drei letzten Ausflusscoefficienten $= 0{,}6315$.

Mündung No. 5. $a = 6{,}1701$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7864$, $h_2 = 0{,}4040$, $h = 0{,}5794$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 129{,}8$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6222$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6396$, $h_2 = 0{,}2414$, $h = 0{,}4167$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 158{,}25$ Sec.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6268$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4040$, $h_2 = 0{,}1144$, $h = 0{,}2371$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 150{,}25$ Sec.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6366$.

Mittel aus den letzten drei Ausflusscoefficienten $= 0{,}6285$.

Mündung No. 6. $a = 12{,}655$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7855$, $h_2 = 0{,}4032$, $h = 0{,}5786$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 64$ Sec.

Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6155$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6389$, $h_2 = 0,2405$, $h = 0,4158$.

Ausflusszeit $\tau = 77,5$ Sec.

Ausflusscoefficient $\mu = 0,6249$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4032$, $h_2 = 0,1135$, $h = 0,2361$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 74,75$ Sec.

Ausflusscoefficient $\mu = 0,6254$.

Mittel aus den letzten drei Ausflusscoefficienten $= 0,6219$.

Vergleicht man die eben gefundenen Ausflusscoefficienten unter einander, so zeigt sich zwar auch hier wie bei den kreisförmigen Mündungen eine Zunahme derselben, wenn die Druckhöhe eine kleinere wird, allein auch bei einerlei Druck stellten sich nach der absoluten Grösse der Mündung sehr verschiedene Werthe der Ausflusscoefficienten heraus, obgleich diese Mündungen unter sich fast ganz ähnlich waren, nämlich jede ungefähr doppelt so hoch als weit. Der mittlere Ausflusscoefficient ist für die grössere Druckhöhe $= 0,6295$, für die mittlere Druckhöhe $= 0,6351$, für die kleinere Druckhöhe $= 0,6404$, das Mittel aus allen ist endlich $= 0,6350$.

Dieser mittlere Werth wird am meisten von dem mittleren Ausflusscoefficienten 0,6565 der Mündung No. 3 übertroffen und übertrifft selbst wieder die mittleren Ausflusscoefficienten der ersten und sechsten Mündung (0,6240 und 0,6219) am meisten. Die bedeutenden Abweichungen, wonach für eine mittlere Mündung der Ausflusscoefficient um mehr als 0,03 grösser ist als für eine kleinere und für eine grössere, haben aber sicherlich nicht in Mängeln der Versuche ihren Grund, sondern es ist vielmehr anzunehmen, dass diese Veränderlichkeit — kleine Differenzen nicht berücksichtigt — wirklich statt hat.

Von diesen 6 Mundstücken wurden die ersten fünf in die Ausmündung des oben näher angegebenen parallelepipedischen Messingrohres geschoben und nach Befinden an dieselbe angeschraubt und dabei folgende Beobachtungen angestellt.

Das Messingrohr ohne Mundstück mit der Ausmündung von 12,435 Quadratcentimeter Inhalt (a_1).

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7868$, $h_2 = 0,4046$, $h = 0,5800$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 51,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7773$.

Entsprechender Widerstandscoefficient $\zeta = 0,6550$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6401$, $h_2 = 0,2418$, $h = 0,4172$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 62,5$ Sec., Coefficient $\mu = 0,7872$.

Coefficient $\zeta = 0,6134$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4046$, $h_2 = 0,1146$, $h = 0,2375$ Meter.

Zeit $\tau = 60,75$ Sec., Coefficient $\mu = 0,7818$.

Coefficient $\zeta = 0,6364$.

Mündung No. 1 im Rohr.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{1,9715}{12,435} = 0,15855$.

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,025136$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7868$, $h_2 = 0,4046$, $h = 0,5800$ Meter.
Zeit $\tau = 396,25$, hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0,6372$.

Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu_2{}^2} - 1 = 1,4627$. Hiervon abgezogen den Widerstand für das Rohr $= \zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6550 . 0,02514 = 0,0165$, bleibt $2,4627 - 0,0165 = 1,4462$, endlich folgt hiernach der gesuchte Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,4462}} = \frac{1}{\sqrt{2,4462}} = 0,6394.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6401$, $h_2 = 0,2418$, $h = 0,4172$ Meter.
Zeit $\tau = 483,5$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6418$.

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,4276$.

Widerstand wegen des Rohres $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6134 . 0,0251 = 0,0154$, demnach $\frac{1}{\mu^2} = 2,4276 - 0,0154 = 2,4122$ und der in Frage stehende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,4122}} = 0,6439.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4046$, $h_2 = 0,1146$, $h_3 = 0,2375$ Meter.
Zeit $\tau = 461$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6498$.

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,3686$.

Widerstand des Rohres $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6364 . 0,02514 = 0,0160$, demnach $\frac{1}{\mu_2{}^2} - \zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 2,3526$, und der gesuchte Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3526}} = 0,6520.$$

Das Mittel aus den drei Werthen von μ ist $= \frac{0,6394 + 0,6439 + 0,6520}{3} = 0,6451$; für den Ausfluss durch die Mündung in der dünnen Wand wurde aber dieses Mittel $= 0,6240$ gefunden, demnach ist die Abweichung $0,6451 - 0,6240 = 0,0211$, und das Verhältniss derselben zu dem letzten Coefficienten $= \frac{0,0211}{0,6240} = 0,0338$.

Mündung No. 2 im Rohr.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = 0,20012$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,04005$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7830$, $h_2 = 0{,}4006$, $h = 0{,}5760$ Meter.

Zeit $\tau = 302$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0{,}6650$.

Ausdruck $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2613$.

Widerstand des Rohres $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6550 . 0{,}04 = 0{,}0262$, demnach der Ausflusscoefficient für die Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}2613 - 0{,}0262}} = 0{,}6689.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6362$, $h_2 = 0{,}2380$, $h = 0{,}4131$ Meter.

Zeit $\tau = 369{,}5$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0{,}6684$, entsprechender Werth von $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}2381$.

Widerstand der Röhre $= 0{,}6134 . 0{,}04 = 0{,}0246$, Ausflusscoefficient der Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}2381 - 0{,}0246}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}2135}} = 0{,}6721.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4006$, $h_2 = 0{,}1110$, $h = 0{,}2333$ Meter.

Zeit $\tau = 351{,}5$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0{,}6801$, entsprechender Werth von $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}1619$.

Widerstand der Röhre $= 0{,}6364 . 0{,}04 = 0{,}0255$, folglich Ausflusscoefficient für die blosse Mündung

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1619 - 0{,}0255}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}1364}} = 0{,}6842.$$

Mittel aus den letzten drei Werthen von $\mu = 0{,}6751$.

Das Mittel der drei Ausflusscoefficienten für dieselbe Mündung in der grossen ebenen Wandfläche war $= 0{,}6494$, daher ist die Differenz beider Mittel $= 0{,}6751 - 0{,}6494 = 0{,}0257$, und das Verhältniss dieser Abweichung zum mittleren Ausflusscoefficienten (0,6494) für die Mündung in der dünnen Wand $= \frac{0{,}0257}{0{,}6494} = 0{,}0395$.

Mündung No. 3 im Rohr.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}23133$, Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}053514$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7859$, $h_2 = 0{,}4034$, $h = 0{,}5789$ Meter.

Zeit $\tau = 256{,}5$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0{,}6758$, entsprechender Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2{,}1894$.

Röhrenwiderstand $= 0{,}6550 . 0{,}0535 = 0{,}0351$, gesuchter Ausflusscoefficient für die blosse Mündung

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}1894 - 0{,}0351}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}1543}} = 0{,}6813.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6391$, $h_2 = 0,2409$, $h = 0,4162$ Meter.

Zeit $\tau = 312$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6823$, entsprechender Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,1481$.

Maass des Röhrenwiderstandes $= 0,6134.\ 0,0535 = 0,0328$, in Frage befindlicher Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,1481 - 0,0328}} = \frac{1}{\sqrt{2,1153}} = 0,6876.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4034$, $h_2 = 0,1135$, $h = 0,2362$.

Zeit $\tau = 297,25$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6922$, entsprechender Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,0869$.

Röhrenwiderstand: $0,6364.\ 0,0535 = 0,0341$, gesuchter Ausflusscoefficient: $\mu = 0,6980$.

Das Mittel aus den drei Ausflusscoefficienten für die Mündung No. 3 ist $= 0,6890$, beim Ausfluss durch die Mündung in der grossen Wand wurde $\mu = 0,6565$ gefunden, daher ist die Differenz $= 0,6890 - 0,6565 = 0,0325$, und das Verhältniss derselben zum Mittel $(0,6565) = \frac{0,0325}{0,6565} = 0,0495$.

Mündung No. 4 im Rohr.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,30234$, Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,09141$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7830$, $h_2 = 0,4006$, $h = 0,5760$ Meter.

Zeit $\tau = 201,75$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6589$, entsprechender Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,3032$.

Röhrenwiderstand $= 0,6550.\ 0,0914 = 0,0599$, folglich der in Frage befindliche Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,3032 - 0,0599}} = \frac{1}{\sqrt{2,2433}} = 0,6677.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6362$, $h_2 = 0,2380$, $h = 0,4131$ Meter.

Zeit $\tau = 247$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6619$, Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,2826$.

Röhrenwiderstand $= 0,0561$, Ausflusscoefficient der Mündung allein

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,2826 - 0,0561}} = \frac{1}{\sqrt{2,2265}} = 0,6702.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4006$, $h_2 = 0,1110$, $h = 0,2333$ Meter.

Zeit $\tau = 236,75$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6684$, Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,2384$.

Röhrenwiderstand $= 0,0582$, Ausflusscoefficient für die Mündung

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2,2384 - 0,0582}} = \frac{1}{\sqrt{2,1802}} = 0,6773.$$

Das Mittel aus den letzten drei Ausflusscoefficienten ist $= 0,6717$, für die grosse Wandfläche wurde es aber $= 0,6315$ gefunden, deshalb ist die Abweichung beider von einander $= 0,0402$, und das Verhältniss dieser zum Coefficienten $0,6315 = \frac{0,0402}{0,6315} = 0,0636$.

Mündung No. 5 im Rohr.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,4962$, Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,2462$.

Grosser Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7830$, $h_2 = 0,4006$, $h = 0,5760$ Meter.

Zeit $\tau = 117$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6923$, Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,0864$.

Röhrenwiderstand $= 0,1613$, Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,9251}} = 0,7207.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6362$, $h_2 = 0,2380$, $h = 0,4131$ Meter.

Zeit $\tau = 142,5$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,6991$, Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 2,0463$.

Röhrenwiderstand $= 0,1510$, Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,8953}} = 0,7264.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4006$, $h_2 = 0,1110$, $h = 0,2333$ Meter.

Zeit $\tau = 136,25$ Sec., Coefficient $\mu_2 = 0,7077$, Werth $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,9968$.

Röhrenwiderstand $= 0,1567$, Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,8401}} = 0,7372.$$

Das Mittel aus den Ausflusscoefficienten μ ist $= 0,7281$, für dieselbe Mündung in der grossen Wandfläche ist es aber $= 0,6285$, demnach folgt die Differenz zwischen beiden $= 0,0996$ und das Verhältniss dieser zum Coefficienten $0,6285 = 0,1585$.

Ausser diesen Versuchen über den Ausfluss durch die in die Ausmündung eines längeren Messingrohres eingesetzten Mundstücke wurden auch noch andere mit einem engeren und kürzeren Rohre angestellt, da indessen die Ergebnisse dieser Versuche in sofern von den eben aufgestellten Resultaten abweichen, als sie auf grössere Ausflusscoefficienten führen, so möge im Folgenden nicht auf die näheren Verhältnisse derselben eingegangen werden.

Dieses kurze parallelepipedische Rohr ist bereits in der ersten Abtheilung beschrieben und dort auf Taf. I. in Fig. 10 abgebildet worden. Die Länge dieses Ansatzrohres war $12\frac{1}{2}$ Centimeter, die Weite in der Ausmündung $= 4,217$ und die Höhe $= 1,910$ Centimeter, folglich der Inhalt der Mündung $= 8,0544$ Quadratcentimeter.

Zu verschiedenen Zeiten angestellte Versuche gaben für die grössere Druckhöhe:

das eine Mal $\mu = 0,8128$, das andere Mal $\mu = 0,8105$,

oder $\frac{1}{\mu^2} = 1,5135$, „ „ „ $\frac{1}{\mu^2} = 1,5223$,

also im Mittel $\mu = 0,8116$ und $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0,5177$;

für die mittlere Druckhöhe:

das eine Mal $\mu = 0,8183$, das andere Mal $\mu = 0,8123$,

oder $\frac{1}{\mu^2} = 1,4935$, „ „ „ $\frac{1}{\mu^2} = 1,5155$,

also im Mittel $\mu = 0,8153$ und $\zeta = 0,5045$;

für die kleinere Druckhöhe:

das eine Mal $\mu = 0,8103$, das andere Mal $\mu = 0,8097$,

oder $\frac{1}{\mu^2} = 1,5230$, „ „ „ $\frac{1}{\mu^2} = 1,5253$,

also im Mittel $\mu = 0,8100$ und $\zeta = 0,5242$.

Die mittleren Werthe aus allen diesen Coefficienten sind wiederum

$\mu = 0,8123$,
$\zeta = 0,5155$.

Die Mündung No. 1, für welche $\frac{a}{a_1} = 0,24477$ ist, gab nach Abzug des Röhrenwiderstandes

für die grössere Druckhöhe $\mu = 0,6608$,
„ „ mittlere „ $= 0,6659$,
„ „ kleinere „ $= 0,6726$,
also im Mittel $\mu = 0,6664$.

Für die Mündung in der grossen Wand wurde aber $\mu = 0,6240$ gefunden, daher bleibt der Ueberschuss $= 0,0424$, und dessen relativer Werth $= \frac{0,0424}{0,6240} = 0,0680$.

Die Mündung No. 2, für welche $\frac{a}{a_1} = 0,30897$ ist, gab nach Abzug des Röhrenwiderstandes

für die drei Druckhöhen: $\mu = 0,7067$; $0,7110$; $0,7247$,
also im Mittel $= 0,7141$,

während für dieselbe Mündung in der grossen Wandfläche $\mu = 0,6494$ gefunden wurde. Der Ueberschuss ist demnach $= 0,0647$, und dessen relativer Werth $= 0,0996$.

Die Mündung No. 3, für welche $\frac{a}{a_1} = 0,35715$ ist, gab unter denselben Umständen:

$\mu = 0,7174$; $0,7267$; $0,7373$,
also im Mittel $= 0,7271$,

hiervon den Coefficienten für die Mündung in der grossen Wand (0,6565) abgezogen, folgt die Differenz $= 0,0706$, und deren relativer Werth $= \frac{0,0706}{0,6565} = 0,1075$.

Der Mündung No. 4, für welche $\frac{a}{a_1} = 0,46678$ ist, entsprechen die Ausflusscoefficienten

$$\mu = 0,7541;\ 0,7631;\ 0,7834,$$

deren Mittel $= 0,7669$ ist. Für die in der grossen Wand befindliche Mündung war aber $\mu = 0,6315$, daher ist die absolute Differenz $= 0,1354$ und ihr relativer Werth $= 0,2144$.

Die Mündung No. 5, für welche $\frac{a}{a_1} = 0,76605$ ist, entsprechen die Coefficienten

$$\mu = 0,8596;\ 0,8599;\ 0,8759,$$

deren mittlerer Werth $= 0,8651$ ist. Nun ist aber, dieselbe Mündung in die grosse Wandfläche eingesetzt, $\mu = 0,6285$ gefunden worden, deshalb folgt die absolute Abweichung $= 0,2366$ und die relative $= \frac{0,2366}{0,6285} = 0,3765$.

Um nun die so bestimmten Correctionen der Ausflusscoefficienten, welche der Unvollkommenheit der Contraction entsprechen, mit den für die kreisrunden Mündungen weiter oben ausgemittelten zu vergleichen, sind folgende tabellarische Zusammenstellungen gemacht worden.

Tabelle XIX.

Werthe für $x = \frac{a}{a_1}$.		0,159	0,200	0,231	0,302	0,496
Werthe für $y = \frac{\mu_x - \mu}{\mu}$.	Genommen aus Tab. XV. für die runden Mündungen.	0,025	0,034	0,040	0,060	0,132
	Nach den Versuchen mit dem langen Rohre.	0,034	0,039	0,049	0,064	0,158
Werthe für $x = \frac{a}{a_1}$.		0,245	0,309	0,357	0,467	0,766
Werthe für $y = \frac{\mu_x - \mu}{\mu}$.	Genommen aus Tab. XV. für die runden Mündungen.	0,044	0,063	0,077	0,119	0,317
	Nach den Versuchen mit dem kurzen Rohre.	0,068	0,100	0,107	0,214	0,376

Dieser Tabelle zufolge erfordern die rectangulären Mündungen noch grössere Correctionen als die runden, und grössere bei kurzem als bei langem Rohre. Aus dem letzteren lässt sich schliessen, dass die Ausflusscoefficienten auch noch von der Länge des Rohres abhängen, da wir indessen oben keine Differenzen gefunden haben, die runde Mündung mochte in der Ausmündung des Messing- oder in der des langen Eisenrohres sich befinden, so ist vielmehr anzunehmen, dass nur bei sehr kurzen Röhren, deren Länge die Weite nicht viel mehr als drei Mal enthält, eine Vergrösserung der Ausflusscoefficienten eintrete, und überdiess auch nur dann, wenn das Wasser mit Contraction in das Rohr eintritt, das letztere also nicht mit einer conoidischen Einmündung ausgerüstet ist. In diesem Falle lässt sich nämlich erwarten, dass der beim Eintritt contrahirt werdende Wasserstrahl noch zum Theil als solcher zur Ausmündung gelange, dem übrigen Wasser im Rohre nur unvollkommen seine Bewegung mittheile und deshalb auch noch weniger Zusammenziehung beim Austritt erleide.

Nehmen wir aus diesem Grunde nur auf die Versuche mit dem langen Messingrohr Rücksicht und bestimmen wir aus ihnen die Constanten der Formel, welche das Gesetz der Abhängigkeit der Ausflusscoefficienten von der relativen Grösse der Mündung ausdrückt.

Bezeichnen wir den relativen Inhalt $\frac{a}{a_1}$ der Mündung mit x und die entsprechende relative Vergrösserung des Ausflusscoefficienten $\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ mit y, so können wir bei den runden Ausflussöffnungen

$$y = A\,(a^x - 1)$$

setzen.

Nun ist aber für die grosse Mündung (von *circa* $2\frac{1}{2}$ Centimeter Höhe und 5 Centimeter Weite) der mittlere Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction $= 0{,}6219$ gefunden worden, daher lässt sich für $x = 1$, $y = \frac{1 - 0{,}6219}{0{,}6219} = 0{,}6080$ setzen, und es folgt sonach durch Division

$$y = 0{,}608.\,\frac{a^x - 1}{a - 1}.$$

Nimmt man für x und y einige zusammengehörige Werthe aus der vorletzten Tabelle, so findet man bald, dass $a = 9$ und deshalb $A = \frac{0{,}6080}{8} = 0{,}076$ der Gleichung gut entsprechen, dass also wenigstens annähernd

$$y = 0{,}076\,(9^x - 1)$$

gesetzt werden kann.

Schlägt man den bei runden Mündungen betretenen Weg auch hier ein, um die genaueren Werthe von A und a zu finden, so hat man die nöthigen Correctionen dA und da dieser Werthe durch die Auflösung folgender zwei Bestimmungsgleichungen auszumitteln:

$$\Sigma\left((a)^x - 1\right) dA + \frac{A}{a}\,\Sigma\,(xa^x).\,da = \Sigma\,(y) - \Sigma\left((a)^x - 1\right) \text{ und}$$

$$(a - 1)\,dA + A da = 0{,}6080 - A\,(a - 1).$$

Nun sind aber für $a = 9$ und $A = 0{,}076$ die Werthe von a^x, xa^x und y folgende:

1,4181	0,2250	0,0338
1,5518	0,3104	0,0395
1,6612	0,3837	0,0495
1,9417	0,5864	0,0636
2,9737	1,4750	0,1585
Summe: 9,5465,	Summe: 2,9810,	Summe: 0,3449;

daher ist

$$\Sigma\,(a^x - 1) = 4{,}5465 \text{ und}$$

$$\frac{A}{a}\,\Sigma\,(xa^x) = \frac{0{,}076.\ 2{,}9810}{9} = 0{,}02517.$$

Die Bestimmungsgleichungen sind nun

$$4{,}5465.\ dA + 0{,}02517.\ da = -\ 0{,}0006 \text{ und } 8.\ dA = -\ 0{,}076.\ da, \text{ oder}$$

$$dA = -\ 0{,}0095\ da \text{ und } -\ 0{,}04319\ da + 0{,}02517\ da = -\ 0{,}0006, \text{ oder}$$

$$0{,}01802\ da = 0{,}0006.$$

Aus ihnen folgen die nöthigen Correctionen

$$da = 0,0333 \text{ und } dA = -0,00032;$$

es ist demnach genauer

$$a = 9,0333 \text{ und } A = 0,07568,$$

die gesuchte Formel aber

$$y = 0,07568\ (9,0333^x - 1).$$

Da die Abweichungen (da und dA) ziemlich klein ausgefallen sind, so wird man, so lange nicht noch eine ausgedehntere Reihe von Versuchen vorliegt,

$$y = 0,076\ (9^x - 1) \text{ oder}$$

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0,076\ (9^{\frac{a}{a_1}} - 1), \text{ endlich}$$

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \mu\left(1 + 0,076\ (9^{\frac{a}{a_1}} - 1)\right)$$

annehmen können.

Setzt man in diese Formel die beobachteten Werthe von x, nämlich: 0,159; 0,200; 0,231; 0,302; 0,496 ein, so bekommt man für y die Werthe: 0,032; 0,042; 0,050; 0,072; 0,150, welche von den beobachteten um die kleinen Werthe + 0,002, — 0,003, — 0,001, — 0,008, + 0,008 abweichen, deren Summe nur — 0,002 beträgt. Die runden Mündungen geben die Formel

$$y = 0,04564\ (14,821^x - 1),$$

wornach sich die Werthe von y kleiner herausstellen.

Diese Abweichungen werden durch das Curvensystem auf Tafel II. noch mehr vor Augen geführt. Man sieht, dass sich die den rectangulären Mündungen entsprechende Curve *ALB* über der Curve *AKB*, welche den runden Mündungen angehört, hinzieht. In den meisten Fällen der Anwendung fällt jedoch die Abweichung der Ausflusscoefficienten für rectanguläre Mündungen von denen für runde nicht bedeutend aus. Z. B. für das Querschnittsverhältniss $x = \frac{a}{a_1} = 0,25$ ist bei der runden Mündung $y = 0,045$, bei der rectangulären aber $y = 0,055$; wäre nun für beide der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction = 0,61, so würde er hiernach bei unvollkommener Contraction in dem einen Falle = 0,61 . 1,045 = 0,637, im zweiten Falle aber = 0,61 . 1,055 = 0,643, also noch nicht ein Procent grösser sein.

Um in vorkommenden Fällen der Anwendung der Rechnung überhoben zu sein, ist folgende Tabelle nach der Formel $y = 0,076\ (9^x - 1)$ berechnet worden.

Tabelle XX.

Die Correctionen der Ausflusscoefficienten für den Ausfluss durch rectanguläre Mündungen bei unvollkommener Contraction.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,019	0,042	0,071	0,107	0,152	0,208	0,278	0,365	0,473
1	0,002	0,021	0,044	0,074	0,111	0,157	0,214	0,286	0,375	0,485
2	0,003	0,023	0,047	0,077	0,115	0,162	0,221	0,294	0,385	0,498
3	0,005	0,025	0,050	0,081	0,119	0,167	0,227	0,302	0,395	0,510
4	0,007	0,027	0,053	0,084	0,124	0,173	0,234	0,310	0,405	0,523
5	0,009	0,030	0,056	0,088	0,128	0,178	0,241	0,319	0,416	0,537
6	0,011	0,032	0,058	0,091	0,133	0,184	0,248	0,328	0,427	0,551
7	0,013	0,034	0,061	0,095	0,137	0,190	0,255	0,337	0,438	0,564
8	0,015	0,037	0,064	0,099	0,142	0,196	0,263	0,346	0,449	0,579
9	0,017	0,039	0,068	0,103	0,147	0,202	0,270	0,355	0,461	0,593

Der Gebrauch dieser Tabelle ist von dem ähnlicher, oben zusammengestellter Tabellen nicht abweichend.

B. Versuche über die unvollkommene Contraction beim Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

1) Ausfluss in die freie Luft.

a) Die Einmündung der Ansatzröhre in die grosse ebene Wandfläche fallend.

Ueber den Ausfluss des Wassers durch kurze, ungefähr dreimal so lange als weite Ansatzröhren bei vollkommener Contraction in der Einmündung wurden folgende Versuche angestellt.

Mundstück No. 1. Durchmesser in der Ausmündung desselben $= 1{,}064$ Centimeter, Inhalt derselben $a = \pi . (0{,}532)^2 = 0{,}88914$ Quadratcentimeter.

Versuch bei grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7847$, $h_2 = 0{,}4029$, $h = 0{,}5780$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 656$ Secunden.
Hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8540$.

Versuch bei mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6387$, $h_2 = 0{,}2407$, $h = 0{,}4159$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 808{,}5$ Secunden.
Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8517$.

Versuch bei kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4029$, $h_2 = 0{,}1137$, $h = 0{,}2361$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 784$ Secunden.

Ausflusscoefficient $\mu = 0,8471$.
Das Mittel aus den gefundenen drei Ausflusscoefficienten ist $= 0,8569$.

Mundstück No. 2. Durchmesser in der Ausmündung $= 1,934$ Centimeter, Inhalt dieser $a = 2,9377$ Quadratcentimeter.

Versuch bei grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7832$, $h_2 = 0,4009$, $h = 0,5762$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 204,15$ Sec.
Ausflusscoefficient $\mu = 0,8330$.

Versuch bei mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6363$, $h_2 = 0,2382$, $h = 0,4133$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 251$ Sec.
Ausflusscoefficient $\mu = 0,8332$.

Versuch bei kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4009$, $h_2 = 0,1109$, $h = 0,2334$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 244,1$ Sec.
Ausflusscoefficient $\mu = 0,8307$.
Mittel aus den drei letzten Ausflusscoefficienten $= 0,8323$.

Mundstück No. 3. Durchmesser desselben in der Ausmündung $= 2,672$ Centimeter, Inhalt $a = 5,6074$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7819$, $h_2 = 0,3996$, $h = 0,5748$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 109,15$ Secunden.
Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0,8171$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3996$, $h_2 = 0,1095$, $h = 0,2319$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 131,85$ Sec.
Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0,8086$.
Mittel aus den letzten zwei Coefficienten $= 0,8129$.

Mundstück No. 4. Durchmesser in der Ausmündung $= 2,8925$ Centimeter, Inhalt dieser $a = 6,5711$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7845$, $h_2 = 0,4028$, $h = 0,5779$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 92,75$.
Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0,8172$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6384$, $h_2 = 0,2405$, $h = 0,4157$ Meter.
Ausflusszeit $\tau = 114,25$ Sec.
Ausflusscoefficient $\mu = 0,8154$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4028$, $h_2 = 0{,}1133$, $h = 0{,}2358$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 111$ Sec.

Danach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8070$.

Mittel aus den letzten drei Ausflusscoefficienten $= 0{,}8132$.

Mundstück No. 5. Durchmesser desselben $= 3{,}302$ Centimeter, Inhalt $a = 8{,}5634$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7820$; $h_2 = 0{,}3996$, $h = 0{,}5749$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 71{,}5$ Sec.

Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8170$. Aeltere Versuche (s. erste Abtheilung S. 92.) gaben diesen Coefficienten $\mu = 0{,}8175$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3996$, $h_2 = 0{,}1095$, $h = 0{,}2319$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 85{,}5$ Sec.

Hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8165$.

Mittel aus den letzten zwei Ausflusscoefficienten $= 0{,}8170$.

Ausfluss durch das längere Messingrohr.

Länge dieses Rohres $27\frac{1}{2}$ Centimeter, lichte Weite desselben $= 4{,}032$ Centimeter. Inhalt seines Querschnittes $a = 12{,}768$ Quadratcentimeter.

Bei grösserem Mitteldruck.

1) Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7743$, $h_2 = 0{,}3920$, $h = 0{,}5671$ Meter.
   Ausflusszeit $\tau = 49{,}75$ Sec.
   Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}7927$.
2) Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7753$, $h_2 = 0{,}3930$, $h = 0{,}5681$ Meter.
   Ausflusszeit $\tau = 49{,}25$ Sec.
   Daraus berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8001$.
   Mittel aus beiden Werthen $= 0{,}7964$.
   Entsprechender Widerstandscoefficient $= \frac{1}{\mu^2} - 1 = 0{,}5766$.

Nun ist aber der Reibungswiderstand der Röhre $\zeta = 0{,}0011463.\ 2g\frac{l}{d}$, wo $g = 9{,}81$, $d = 4{,}032$, und $l = 27{,}5 - 3d = 27{,}5 - 12{,}10 = 15{,}4$ gesetzt werden muss, d. i. $\zeta_1 = 0{,}0860$, demnach bleibt für die kurze Ansatzröhre von 4,032 Centimeter Weite und 12,10 Centimeter Länge der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}5766 - 0{,}0860 = 0{,}4906$, und der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}} = 0{,}8191.$$

Bei kleinerem Mitteldruck.

1) Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3920$, $h_2 = 0{,}1020$, $h = 0{,}2235$ Meter.
   Ausflusszeit $\tau = 59{,}25$ Sec.
   Coefficient $\mu = 0{,}8047$.

2) Druckhöhen: $h_1 = 0,3930$, $h_2 = 0,1029$, $h = 0,2245$ Meter.
Ausflusszeit $t = 59,50$ Sec.
Coefficient $\mu = 0,7997$.
Mittel aus den letzten zwei Ausflusscoefficienten $\mu = 0,8022$.

Entsprechender Widerstandscoefficient $\frac{1}{\mu^2} - 1 = 0,5540$.

Hiervon den Reibungswiderstand der Röhre, d. i. $\zeta_1 = 0,0860$, abgezogen, bleibt der Widerstandscoefficient für das kurze, drei Mal so lange als weite Röhrenstück $= \zeta = 0,4680$, und der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1,4680}} = 0,8253.$$

Mittel aus den letzten zwei Ausflusscoefficienten für das kurze Röhrenstück $= 0,8222$.

Bei der Vergleichung der oben gefundenen Ausflusscoefficienten stellt sich sogleich heraus, dass sich dieselben mit der Druckhöhe nicht sehr verändern, dass sie namentlich nicht wie beim Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand grösser ausfallen bei kleinerem Drucke als bei höherem Drucke, dass im Gegentheil mit der Abnahme des Druckes eine kleine Abnahme des Ausflusscoefficienten verbunden zu sein scheint. Dagegen wachsen, in Uebereinstimmung mit dem Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand, die Ausflussöffnungen bei Abnahme der absoluten Grösse der Mündung, und wir können deshalb im Folgenden diese Veränderlichkeit durch den Lauf einer geraden Linie ausdrücken, wie wir es schon oben bei Mündungen in der dünnen Wand gethan haben.

Hiernach ist aus den Resultaten der letzten Versuche zunächst folgende Tabelle zusammenzustellen.

Tabelle XXI.

Nummer des Mund-stückes.	Durchmesser der Mündung in Decimetern.	Abweichung vom mittleren Durchmesser (u).	Ausflusscoefficienten (μ).	Abweichung vom mittleren Ausflusscoefficienten (v).	u^2.	uv.	v^2.
1	0,1064	— 0,15854	0,8509	+ 0,02615	0,025135	— 0,004146	0,0006838
2	0,1934	— 0,07154	0,8323	+ 0,00755	0,005118	— 0,000540	0,0000570
3	0,2672	+ 0,00226	0,8129	— 0,01185	0,000005	— 0,000027	0,0001404
4	0,28925	+ 0,02431	0,8132	— 0,01155	0,000591	— 0,000281	0,0001334
5	0,3302	+ 0,06526	0,8170	— 0,00775	0,004259	— 0,000506	0,0000601
6	0,4032	+ 1,03826	0,8222	— 0,00255	0,019116	— 0,000353	0,0000065
Summen:	1,58965	0,00000	4,9485	0,00000	0,054224	— 0,005853	0,0010812
Mittel:	0,26494		0,82475				

Hiernach folgt für den Winkel Θ, welchen die die Abhängigkeit der Ausflusscoefficienten von den Mündungsdurchmessern ausdrückende Gerade mit der Abscissenaxe einschliesst:

$$\text{tang}\, 2\,\Theta = \frac{2\,\Sigma(uv)}{\Sigma(u^2) - \Sigma(v^2)} = -\frac{2.\ 0,005853}{0,054224 - 0,0010812} = -\frac{0,011706}{0,053143} = -\ 0,22027,$$

$2\,\Theta = -\ 12^\circ\ 43'\ 30''$ und der gesuchte Winkel $\Theta = -\ 6^\circ\ 21'\ 45''$.

Lässt man die (8) Zehntel in den Ordinaten oder Ausflusscoefficienten weg, oder verrückt man die Abscissenaxe um 0,8 parallel mit sich selbst fort, so erhält man für die in Untersuchung befindliche Linie folgende Parameter:

$$p = 0{,}26494 + 0{,}02475 \text{ cotang. } 6^\circ\, 21'\, 45'' = 0{,}48743,$$

$$q = 0{,}02475 + 0{,}26494 . \text{ tang. } 6^\circ\, 21'\, 45'' = 0{,}05422.$$

Bezeichnet nun x den Durchmesser der Röhre und y den entsprechenden Ausflusscoefficienten, so hat man

$$\frac{x}{0{,}48743} + \frac{y - 0{,}8}{0{,}05422} = 1, \text{ demnach}$$

$$y - 0{,}8 = 0{,}05422\,(1 - \frac{x}{0{,}48743}), \text{ d. i.}$$

$$y = 0{,}85422 - 0{,}11124\,x, \text{ oder}$$

$$y = 0{,}85422 - 0{,}011124\,x, \text{ wenn } x \text{ in Centimetern ausgedrückt ist.}$$

Die dieser Gleichung entsprechende Gerade ist als ABC auf Tafel III. abgebildet; man sieht, dass von den sechs Punkten der Beobachtung zwei darüber und vier darunter fallen.

Es ist mit Hilfe der Formel sehr leicht, für kurze cylindrische Ansatzröhren von 1 bis 4 Centimeter Weite die entsprechenden Ausflusscoefficienten zu berechnen, wenn man aber von folgender Tabelle Gebrauch macht, ist selbst diese einfache Rechnung unnöthig.

Tabelle XXII.

		Zehntel.									
	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze.	1	0,843	0,842	0,841	0,840	0,839	0,838	0,837	0,836	0,834	0,833
	2	0,832	0,831	0,830	0,829	0,828	0,826	0,825	0,824	0,823	0,822
	3	0,821	0,820	0,819	0,818	0,817	0,816	0,814	0,813	0,812	0,811

Der Gebrauch dieser Tabelle ist ganz in Uebereinstimmung mit dem anderer, oben gegebener Tabellen. Z. B. für die kurze Ansatzröhre von 2,8 Centimeter Weite ist der Ausflusscoefficient hiernach = 0,823, weil diese Zahl in der Horizontalreihe (2) und in der Vertikalreihe (8) zugleich liegt.

Es ist nun die Frage: lassen sich die gefundenen Ausflusscoefficienten für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren aus den weiter oben gefundenen Contractionscoefficienten für Mündungen in der dünnen Wand ableiten? Ist α der Contractionscoefficient für die Mündung in der dünnen Wand, so wäre nach der seitherigen Theorie der Ausflusscoefficient für eine ebenso weite kurze cylindrische Ansatzröhre:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2}}.$$

Für eine drei Centimeter weite kreisförmige Ausflussöffnung wurde der Ausflusscoefficient 0,615 gefunden; da aber nach den weiter oben mitgetheilten Versuchen der Contractionscoefficient noch um 4 Procent grösser ist, so wäre demnach $\alpha = 0{,}615 + 0{,}04 . 0{,}615 = 0{,}640$ anzunehmen und dieser Werth von α in obige Formel einzusetzen.

Hiernach ergibt sich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tfrac{9}{16})^2}} = \frac{16}{\sqrt{337}} = 0{,}872;$$

da wir aber nur 0,815 gefunden haben, so gibt die Theorie offenbar zu viel.

Fassen wir die Ausflussverhältnisse auf folgende Weise auf. Schon beim Durchgang durch die Mündung in der dünnen Wand findet eine gewisse Geschwindigkeitsverminderung oder Tödten von lebendiger Kraft statt; wir haben gefunden, dass dieselbe $= 0{,}0765.\frac{v_1^2}{2g}$ zu setzen sei, wenn v_1 die Ausflussgeschwindigkeit für die Mündung in der dünnen Wand bezeichnet. Es fliesst aber das Wasser in der Ansatzröhre α mal so schnell als dort, daher ist $v = \alpha v_1$ und $v_1^2 = \frac{v^2}{\alpha^2}$, insofern v die Ausflussgeschwindigkeit für die kurze Röhre bezeichnet. Der durch eine Druckhöhe gemessene Verlust an lebendiger Kraft ist daher $= 0{,}0765.\frac{v^2}{2g\alpha^2}$. Nun geht ferner beim Anschluss des contrahirten Wasserstrahles an die Röhrenwand die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{v}{\alpha}$ plötzlich in v über, demnach ist der dieser Veränderung entsprechende Druckhöhenverlust $= (\frac{1}{\alpha} - 1)^2 \frac{v^2}{2g}$. Endlich erfordert die Ausflussgeschwindigkeit v die Druckhöhe $\frac{v^2}{2g}$; daher ist denn die wirklich vorhandene Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2g} + 0{,}0765.\frac{v^2}{2g\alpha^2} + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2 \frac{v^2}{2g}$, und umgekehrt die Ausflussgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + 0{,}0765.\frac{1}{\alpha^2} + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2}},$$

also der Ausflusscoefficient für die kurze Ansatzröhre

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}0765.\frac{1}{\alpha^2} + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2}}$$

zu setzen.

Für $\alpha = 0{,}64$ folgt demnach

$$\mu = \frac{16}{\sqrt{337 + 47{,}812}} = 0{,}816,$$

während wir oben $\mu = 0{,}815$ gefunden haben. Diese Uebereinstimmung übertrifft alle Erwartung.

Ist der Contractionscoefficient α grösser als 0,64, wie z. B. bei einer kleinen Mündung, so fällt auch der entsprechende Ausflusscoefficient für die kurze cylindrische Ansatzröhre grösser aus. Bei Zugrundelegung anderer Werthe von α zeigt sich immer eine gute Uebereinstimmung, wenn auch nicht so eclatant, wie in dem eben berechneten Falle. Da die Versuche über den Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand bei kleineren Druckhöhen grössere Ausflusscoefficienten gaben als bei grösseren, die Versuche über den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren aber eine solche Veränderlichkeit nicht anzeigten, so möchte anzunehmen sein, dass mit der Abnahme der Druckhöhe

nicht der Contractionscoefficient, sondern der Geschwindigkeitscoefficient wachse, also in der Formel

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}0765.\frac{1}{\alpha} + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2}}$$

nicht $\frac{1}{\alpha}$, sondern der Widerstandscoefficient 0,0765 etwas kleiner sei.

Beim Ausfluss durch eine kleinere Mündung möchte aber das Gegentheil, nämlich ein grösserer Contractionscoefficient (α) anzunehmen sein, weil hier den Versuchen zufolge μ mit α wächst.

Die Ansicht, dass mit Abnahme der Druckhöhe oder Ausflussgeschwindigkeit eine Abnahme des Widerstandscoefficienten und also eine Zunahme des Geschwindigkeitscoefficienten verbunden sei, gewinnt noch dadurch an Consistenz, dass der Wasserstrahl bei kleinerem Drucke durchsichtiger ist als bei grösserem Drucke oder grösserer Geschwindigkeit. Je durchsichtiger aber der Wasserstrahl ist, desto kleiner ist gewiss auch die Verschiedenheit in den Geschwindigkeiten der den Strahl bildenden Wasserfäden, und desto kleiner ist auch die Reibung derselben unter einander, desto schwächer also auch der Widerstandscoefficient.

---

b) Die Einmündung der Ansatzröhre in dem Ende des längeren Messingrohres befindlich.

Um den Einfluss der unvollkommenen Contraction auf den Ausfluss des Wassers durch kurze cylindrische Ansatzröhren kennen zu lernen, wurden die aus dem Obigen bekannten fünf Ansatzröhren so in die Ausmündung des längeren Messingrohres eingesetzt, wie Fig. 4 und nach Befinden Fig. 7 vor Augen führen. Das aus dem Wasserkasten durch das längere und weitere Rohr *AB* fliessende Wasser erleidet dann beim Eintritt in die engere kurze Ansatzröhre *CD* eine unvollkommene Contraction, und diese hat beim Anlegen und vollen Ausfliessen des Wassers durch diese Röhre einen Verlust an lebendiger Kraft oder eine Verminderung an Geschwindigkeit zur Folge, die von dem Verhältnisse $\left(\frac{a}{a_1}\right)$ des Querschnittes der Ansatzröhre zu dem des Leitungsrohres odes des Querschnittes vom ausfliessenden Strahle zu dem des ankommenden Wasserstromes abhängt, nämlich bei einem kleineren Werthe von $\frac{a}{a_1}$ kleiner ist als bei einem grösseren Werthe von $\frac{a}{a_1}$. Während für einen sehr kleinen relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1}$ der kurzen Ansatzröhre der Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficient $= 0{,}81$ bis $0{,}84$, also der Geschwindigkeitsverlust 19 bis 16 Procent beträgt, wird bei einem grossen, der Einheit nahe kommenden Werthe von $\frac{a}{a_1}$ dieser Coefficient beinahe Eins, also der Geschwindigkeitsverlust nur wenig über Null betragen können. Ausserdem wurde auch noch die lange Eisenröhre an das Messingrohr angeschoben und in die Ausmündung dieser die bekannten fünf kurzen Ansatzröhren nach und nach eingesetzt, und endlich wurde auch bei einigen Versuchen die Ausfluss-

öffnung dieser Ansatzröhren unter Wasser gesetzt, so dass man auch den Ausfluss durch kurze Ansatzröhren unter Wasser beobachten konnte.

Mundstück No. 1 im Ende des Messingrohres.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = \frac{0{,}88914}{12{,}768} = 0{,}069638$,

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0048495$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7797$, $h_2 = 0{,}3980$, $h = 0{,}5730$ Meter.
Zeit $\tau = 660$ Secunden.
Entsprechender Ausflusscoefficient für die ganze Röhrenverbindung $\mu_2 = 0{,}8523$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}3765$.

Für das lange Rohr allein war der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}5912$, daher kommt in Abzug $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5912 . 0{,}00485 = 0{,}0029$, es folgt also für die kurze Ansatzröhre allein $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3765 - 0{,}0029 = 1{,}3736$, und folglich der entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}3736}} = 0{,}8532.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6337$, $h_2 = 0{,}2357$, $h = 0{,}4106$ Meter.
Zeit $\tau = 815\frac{1}{2}$ Secunden.
Entsprechende Coefficienten $\mu_2 = 0{,}8498$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}3846$.

Widerstand der langen Röhre $= \zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0027$, daher für die blosse kurze Ansatzröhre: $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3846 - 0{,}0027 = 1{,}3819$, und endlich

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}3819}} = 0{,}8507.$$

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3980$, $h_2 = 0{,}1087$, $h = 0{,}2307$ Meter.
Zeit $\tau = 791$ Secunden.
Entsprechende Werthe $\mu_2 = 0{,}8499$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}3845$; hiervon subtrahirt $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}0026$, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3819$, und der gesuchte Ausflusscoefficient für die kurze Ansatzröhre allein:

$$\mu = 0{,}8507.$$

Das Mittel von den Ausflusscoefficienten für alle drei Druckhöhen $= 0{,}8515$.

Mundstück No. 1 im Ende der Eisenröhre sitzend.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = \frac{0{,}088914}{12{,}832} = 0{,}06929$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}004801$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7768$, $h_2 = 0,3944$, $h = 0,5696$ Meter.

Zeit $\tau = 665$ Sec., hieraus berechnet: $\mu_2 = 0,8500$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,3841$.

Hiervon den Widerstand der Leitungsröhre $= \zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,92917.\ 0,0048 = 0,0045$ abgezogen, bleibt für die kurze Ansatzröhre $= 1,3796$, und demnach

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3796}} = 0,8514.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6298$, $h_2 = 0,2318$, $h = 0,4065$ Meter.
Zeit $\tau = 820$ Secunden.
Coefficient $\mu_2 = 0,8495$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,3858$.

Nun geht aber wegen des Röhrenwiderstandes $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,925.\ 0,0048 = 0,0044$ ab, daher bleibt für die kurze Ansatzröhre allein $\frac{1}{\mu^2} = 1,3814$ und folglich $\mu = 0,8509$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3944$, $h_2 = 0,1044$, $h = 0,2261$ Meter.
Zeit $\tau = 801,5$ Secunden.

Coefficient $\mu_2 = 0,8491$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,3872$; hiervon 0,0046 wegen des Widerstandes in der langen Röhre, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,3826$, und endlich $\mu = 0,8405$.

Das Mittel aus den Ausflusscoefficienten von den letzten drei Werthen für μ ist nun $= 0,8509$.

Nun wurde aber oben für $\frac{a}{a_1} = 0,069638$ dieses Mittel $= 0,8515$ gefunden, daher lässt sich denn für das mittlere Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = \frac{0,069638 + 0,069621}{2} = 0,06963$ der mittlere Ausflusscoefficient

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \frac{0,8515 + 0,8509}{2} = 0,8512$$

setzen.

Bei vollkommener Contraction war aber $\mu = 0,8509$, daher ist die Differenz beider Ausflusscoefficienten

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu = 0,8512 - 0,8509 = 0,0003,$$

und das in Frage stehende Verhältniss

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0,0003}{0,8509} = 0,00035,$$

wofür wir 0,0004 annehmen wollen.

Mündung No. 2 im Ende des Messingrohres.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{2,9377}{12,768} = 0,23009$.

Quadrat desselben $= 0,052937$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7743$, $h_2 = 0,3920$, $h = 0,5671$ Meter.
Zeit $\tau = 205$ Secunden.
Entsprechender Ausflusscoefficient $\mu_2 = 0,8362$.

Werth $\frac{1}{{\mu_2}^2} = 1,4303$.

Widerstand des Messingrohres $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5767 . 0,05294 = 0,0305$, daher $\frac{1}{\mu^2} = 1,4303 - 0,0305 = 1,3998$, entsprechender Ausflusscoefficient für die kurze Ansatzröhre

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,3998}} = 0,8452.$$

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6274$, $h_2 = 0,2293$, $h = 0,4038$ Meter.

Zeit $\tau = 252,75$ Secunden, hiernach $\mu_2 = 0,8371$, und $\frac{1}{\mu^2} = 1,4271$.

Wegen der Reibung in der Röhre ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,565 . 0,0529 = 0,0299$, daher bleibt für die kurze Ansatzröhre $\frac{1}{\mu^2} = 1,3972$ und $\mu = 0,8460$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3920$, $h_2 = 0,1020$, $h = 0,2235$ Meter.

Zeit $\tau = 246,5$ Secunden, hiernach $\mu_2 = 0,8407$ und $\frac{1}{{\mu_2}^2} = 1,4150$. Hiervon ab wegen der Reibung im Rohre 0,0293, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,3857$, und der in Frage stehende Ausflusscoefficient $\mu = 0,8495$.

Das Mittel aus den letzten drei Coefficienten μ ist nun $= 0,8569$.

Mundstück No. 5 in der Ausmündung der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{2,9377}{12,832} = 0,22893$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,052410$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7768$, $h_2 = 0,3944$, $h = 0,5696$ Meter.
Zeit $\tau = 204$ Secunden.
Coefficient $\mu_2 = 0,8386$, $\frac{1}{{\mu_2}^2} = 1,4218$.

Nun ist aber der Röhrenwiderstand $= \zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,929 . 0,0524 = 0,0487$, daher bleibt für die kurze Ansatzröhre $= 1,3731$, und $\mu = 0,8534$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6298$, $h_2 = 0{,}2318$, $h = 0{,}4065$ Meter.

Zeit $\tau = 250{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8416$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4117$; hiervon $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}925 . 0{,}0524$ $= 0{,}0485$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3632$ und $\mu = 0{,}8565$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3944$, $h_2 = 0{,}1044$, $h = 0{,}2261$ Meter.

Zeit $\tau = 244{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8425$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4089$; hiervon $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}920 . 0{,}0524$ $= 0{,}0482$, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3607$ und $\mu = 0{,}8573$.

Der mittlere Werth von den letzten drei Ausflusscoefficienten (μ) ist $= 0{,}8557$.

Es lässt sich hiernach für den relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{0{,}23009 + 0{,}22893}{2} = 0{,}22951$ der Ausflusscoefficient

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \frac{0{,}8569 + 0{,}8557}{2} = 0{,}8563$$

setzen.

Bei vollkommener Contraction ist aber für eben diese Ansatzröhre $\mu = 0{,}8323$ gefunden worden, daher ist die Differenz

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu = 0{,}8563 - 0{,}8323 = 0{,}0240,$$ und ihr relativer Werth

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}0240}{0{,}8323} = 0{,}0288.$$

Mündung No. 3 im Ende des Messingrohres.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{5{,}6074}{12{,}768} = 0{,}43918$,

Quadrat desselben: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}19288$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7753$, $h_2 = 0{,}3930$, $h = 0{,}5681$ Meter.
Zeit $\tau = 106{,}65$ Sec.
Coefficient $\mu_2 = 0{,}8413$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4130$.

Wegen des Röhrenwiderstandes ist abzuziehen $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5767 . 0{,}1929 = 0{,}1112$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}4130 - 0{,}1112 = 1{,}3018$, und $\mu = 0{,}8765$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3930$, $h_2 = 0{,}1029$, $h = 0{,}2245$ Meter.

Zeit $\tau = 129{,}35$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8376$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4254$.

Röhrenwiderstand $= 0{,}5533 . 0{,}1929 = 0{,}1067$, daher $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3187$ und $\mu = 0{,}8708$.
Mittel aus beiden Werthen für $\mu = 0{,}8737$.

Mundstück No. 3 im Ende der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{5{,}6074}{12{,}832} = 0{,}43699$.

Quadrat hiervon $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}19095$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7768$, $h_2 = 0{,}3944$, $h = 0{,}5696$ Meter.

Zeit $\tau = 109$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8223$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4790$.

Röhrenwiderstand $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}9292 . 0{,}191 = 0{,}1774$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3016$ und $\mu = 0{,}8765$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3944$, $h_2 = 0{,}1044$, $h = 0{,}2261$ Meter.

Zeit $\tau = 132{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8145$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}5076$.

Nun ist $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}9204 . 0{,}19095 = 0{,}1758$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3318$ und $\mu = 0{,}8665$.

Mittel aus den beiden Werthen von $\mu = 0{,}8715$.

Es ist hiernach für den relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{0{,}43918 + 0{,}43699}{2} = 0{,}43809$ der Ausflusscoefficient

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = \frac{0{,}8737 + 0{,}8715}{2} = 0{,}8726.$$

Bei vollkommener Contraction ist er aber für dieselbe Röhre $= 0{,}8129$ gefunden worden, daher bleibt die Abweichung beider

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu = 0{,}8726 - 0{,}8129 = 0{,}0597, \text{ und deren relativer Werth}$$

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}0597}{0{,}8129} = 0{,}0734.$$

Mundstück No. 4 im Messingrohre.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = \frac{6{,}5711}{12{,}768} = 0{,}51465$.

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}26487$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7775$, $h_2 = 0{,}3958$, $h = 0{,}5707$ Meter.

Zeit $\tau = 92$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8290$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4551$.

Wegen des Röhrenwiderstandes geht ab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5767 . 0{,}2649 = 0{,}1528$, folglich bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3023$ und $\mu = 0{,}8763$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6314$, $h_2 = 0{,}2335$, $h = 0{,}4082$ Meter.

Zeit $\tau \doteq 113{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8284$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4576$; hiervon ab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5650 . 0{,}2649 = 0{,}1497$, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3079$ und $\mu = 0{,}8744$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3958$, $h_2 = 0{,}1064$, $h = 0{,}2282$ Meter.

Zeit $\tau = 111$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8243$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4718$. Hiervon $0{,}5533 . 0{,}2649 = 0{,}1466$ ab, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3252$ und $\mu = 0{,}8687$.

Der mittlere Werth von den letzten drei Ausflusscoefficienten für das kurze Rohr No. 4 ist

$$\mu_{\frac{a}{a_1}} = 0{,}8731.$$

Bei vollkommener Contraction war $\mu = 0{,}8132$, daher folgt für die kurze Ansatzröhre vom relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1} = 0{,}51465$

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}8731 - 0{,}8132}{0{,}8132} = \frac{0{,}0599}{0{,}8132} = 0{,}0737.$$

Mundstück No. 5 im Ende des Messingrohres.

Relativer Querschnitt $\frac{a}{a_1} = \frac{8{,}7406}{12{,}768} = 0{,}68457$.

Quadrat desselben $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}46863$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7753$, $h_2 = 0{,}3930$, $h = 0{,}5681$ Meter.

Zeit $\tau = 70$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8223$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4790$.

Nun ist aber für den Röhrenwiderstand $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}5766 . 0{,}4686 = 0{,}2703$ zu setzen, daher bleibt für die kurze Röhre $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2087$ und $\mu = 0{,}9096$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3930$, $h_2 = 0{,}1029$, $h = 0{,}2245$ Meter.

Zeit $\tau = 84$ Sec., $\mu_2 = 0{,}8275$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4605$.

Wegen des Röhrenwiderstandes kommt weg: $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,5533.\ 0,4686 = 0,2593$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,2012$ und $\mu = 0,9124$.

Mündung No. 5 im Ende der Eisenröhre.

Relativer Querschnitt: $\frac{a}{a_1} = \frac{8,7406}{12,832} = 0,68116$.

Quadrat hiervon: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,46397$.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7768$, $h_2 = 0,3944$, $h = 0,5696$ Meter.

Zeit $\tau = 73,75$ Sec., $\mu_2 = 0,7797$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,6451$.

Röhrenwiderstand $= 0,9292.\ 0,46397 = 0,4311$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,2140$ und $\mu = 0,9076$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3944$, $h_2 = 0,1044$, $h = 0,2261$ Meter.

Zeit $\tau = 89,5$ Sec., $\mu_2 = 0,7735$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1,6712$.

Widerstand der Röhre: $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,9204.\ 0,4640 = 0,4270$, demnach bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,2442$ und $\mu = 0,8965$.

Das Mittel aus den vier Ausflusscoefficienten für die kurze Ansatzröhre No. 5 vom relativen Querschnitt $\frac{a}{a_1} = 0,6826$ ist $= 0,9087$, wogegen dasselbe bei vollkommener Contraction $= 0,8170$ betrug.

Der relative Werth der Abweichung ist hiernach

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{0,9087 - 0,8170}{0,8170} = 0,1114.$$

Setzen wir den mittleren Ausflusscoefficienten für die kurze cylindrische Ansatzröhre bei vollkommener Contraction $= 0,8170$ und den Widerstand der Reibung in einer kurzen Ansatzröhre $= 0,0011463.\ 2g\frac{l}{d} = 0,0011463.\ 2.\ 9,81.\ \frac{1}{3} = 0,0075$, so erhalten wir für $\frac{a}{a_1} = 1$ die Abweichung

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = \frac{1 - 0,0075 - 0,8170}{0,817} = \frac{0,1755}{0,8170} = 0,2148.$$

Es entsteht nun die Frage, in welchen algebraischen Zusammenhang lassen sich die Grössen $x = \frac{a}{a_1}$ und $y = \frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu}$ bringen, oder wie lässt sich aus jedem gegebenen Querschnittsverhältnisse x die entsprechende Correction y des Ausflusscoefficienten bestimmen? Da diese Correctionen nicht so bedeutend ausfallen als beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand, so können wir mit den einfachsten algebraischen Functionen einen Versuch machen, ob dieselben die Abhängigkeit zwischen x und y erträglich genau ausdrücken. Setzen wir deshalb zunächst

$$y = Ax + Bx^2.$$

Nun ist aber für $x = 1$, $y = 0{,}2148$, daher folgt

$$0{,}2148 = A + B \text{ und}$$

$$y = (0{,}2148 - B)\, x + Bx^2,$$

oder in Summen gerechnet:

$$\Sigma(y) = 0{,}2148\, \Sigma(x) - B\left(\Sigma(x) - \Sigma(x^2)\right).$$

Die in Frage stehende Constante ist folglich

$$B = \frac{0{,}2148\, \Sigma(x) - \Sigma(y)}{\Sigma(x) - \Sigma(x^2)}.$$

Der weiter unten stehenden Tabelle No. XXIII. zufolge ist aber

$$\Sigma(x) = 1{,}9344,\ \Sigma(x^2) = 0{,}98019 \text{ und } \Sigma(y) = 0{,}2877,$$

demnach folgt denn

$$B = \frac{0{,}2148.\ 1{,}9344 - 0{,}2877}{1{,}9344 - 0{,}98019} = \frac{0{,}4155 - 0{,}2877}{0{,}9542} = \frac{1278}{9542} = 0{,}1339 \text{ und}$$

$$A = 0{,}2148 - 0{,}1339 = 0{,}0809.$$

Die gesuchte Function ist hiernach

1) $y = 0{,}0809\, x + 0{,}1339\, x^2$, oder

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0{,}0809 \left(\frac{a}{a_1}\right) + 0{,}1339 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2.$$

Eine andere Annahme ist

$$y = Ax + Cx^3,$$

welcher zufolge

$$C = \frac{0{,}2148\, \Sigma(x) - \Sigma(y)}{\Sigma(x) - \Sigma(x^3)} \text{ und}$$

$$A = 0{,}2148 - C$$

zu setzen ist.

Nun ist aber $\Sigma(x^3) = 0{,}55083$, daher ergibt sich hiernach

$$C = \frac{0{,}2148.\ 1{,}9344 - 0{,}2877}{1{,}9344 - 0{,}5508} = \frac{1278}{13836} = 0{,}0924 \text{ und}$$

$$A = 0{,}2148 - 0{,}0924 = 0{,}1224,$$

also die gesuchte Function

2) $y = 0{,}1224\, x + 0{,}0924\, x^3$.

Endlich kann man noch aus den gefundenen Werthen ein Mittel nehmen, und hiernach

3) $y = 0{,}1017\, x + 0{,}0669\, x^2 + 0{,}0462\, x^3$ oder

$$\frac{\mu_{\frac{a}{a_1}} - \mu}{\mu} = 0{,}1017 \left(\frac{a}{a_1}\right) + 0{,}0669 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + 0{,}0462 \left(\frac{a}{a_1}\right)^3$$

setzen.

Die Abweichungen, welche die nach diesen Formeln berechneten Werthe von den beobachteten Werthen für y geben, sind aus folgender Tabelle zu ersehen.

Tabelle XXIII.

	x.	x^2.	x^3.	y beobachtet.	y berechnet nach 1.	y berechnet nach 2.	y berechnet nach 3.	Abweichungen.
	0,0696	0,00484	0,00034	0,0004	0,0063	0,0085	0,0074	— 0,0070
	0,2295	0,05267	0,01209	0,0288	0,0256	0,0292	0,0274	+ 0,0014
	0,4381	0,19193	0,08408	0,0734	0,0611	0,0614	0,0613	+ 0,0121
	0,5146	0,26481	0,13627	0,0737	0,0771	0,0756	0,0763	— 0,0026
	0,6826	0,46594	0,31805	0,1114	0,1176	0,1129	0,1152	— 0,0038
Summen:	1,9344	0,98019	0,55083	0,2877	0,2877	0,2876	0,2876	0,0001.

Um in vorkommenden Fällen der Berechnung der Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficienten nach einer dieser Formeln ganz überhoben zu sein, ist nach Formel (3) folgende Tabelle berechnet und zusammengesetzt worden.

Tabelle XXIV.

Die Correctionen der Ausflusscoeffficienten für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren bei unvollkommen contrahirtem Eintritt in dieselben.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,011	0,023	0,038	0,054	0,073	0,095	0,120	0,148	0,179
1	0,001	0,012	0,025	0,039	0,056	0,075	0,097	0,122	0,151	0,183
2	0,002	0,013	0,026	0,041	0,058	0,078	0,100	0,125	0,154	0,186
3	0,003	0,014	0,028	0,043	0,060	0,080	0,102	0,128	0,157	0,190
4	0,004	0,015	0,029	0,044	0,062	0,082	0,104	0,131	0,160	0,193
5	0,005	0,017	0,030	0,046	0,064	0,084	0,107	0,133	0,163	0,197
6	0,006	0,018	0,032	0,047	0,065	0,086	0,109	0,136	0,166	0,200
7	0,007	0,019	0,033	0,049	0,067	0,088	0,112	0,139	0,169	0,204
8	0,008	0,021	0,035	0,051	0,069	0,091	0,114	0,142	0,173	0,208
9	0,010	0,022	0,036	0,053	0,071	0,093	0,117	0,145	0,176	0,211

Um mit Hilfe dieser Tabelle für das Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,67$ die Correction des Ausflusscoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction zu finden, hat man in der mit (6) überschriebenen Vertikalcolumne herab und in der mit (7) anfangenden Horizontalcolumne bis zum Durchschnitt mit jener herüber zu gehen: die in dem Durchschnitte befindliche Zahl 0,112 ist die gesuchte Correction. Wäre nun für eben diese kurze Ansatzröhre der Ausflusscoefficient bei vollkommen contrahirtem Eintritt $\mu = 0,82$, so würde er für den angeregten Fall $= 0,82\ (1 + 0,112) = 0,9118$ anzunehmen sein.

Die entwickelten Formeln und die danach berechnete Tabelle setzen allerdings voraus, dass der Ausflusscoefficient bei vollkommen contrahirtem Eintritt $= 0,8170$ sei, da er aber zuweilen kleiner und, namentlich bei kleineren Mündungen, auch ansehnlich grösser ist, so erfordern in solchen Fällen

die gefundenen Constanten eigentlich noch eine kleine Correction. So gibt z. B. unsere Formel für $x = 0,95$: $y = 0,197$; wäre nun der Ausflusscoefficient bei vollkommener Contraction $= 0,84$, wie z. B. bei sehr engen kurzen Ansatzröhren, so würde hiernach der Ausflusscoefficient für das gegebene Querschnittsverhältniss $(0,95) = 1,197.\ 0,84 = 1,005$ sein, was offenbar zu viel ist, da der Grenzwerth selbst nur 0,9925 beträgt. Welche Correction wird nun deshalb an y vorzunehmen sein?

Setzen wir den Grenzwerth $\frac{0,9925 - \mu}{\mu} = a$, so erhalten wir durch Differenziren in Beziehung auf μ und a:

$$da = -\frac{0,9925.\ d\mu}{\mu^2}.$$

Gewiss lässt sich die Annahme, dass die Veränderungen da und dy in a und y den absoluten Werthen von a und y proportional bleiben, unter allen anderen Voraussetzungen noch am ehesten rechtfertigen; setzen wir deshalb:

$$\frac{dy}{da} = \frac{y}{a},\ \text{d. i. } dy = -\frac{0,9925.\ d\mu}{a\mu^2}.\ y,\ \text{oder}$$

$$dy = -\frac{0,9925.\ d\mu}{(0,9925 - \mu)\ \mu}.\ y.$$

Nimmt man nun noch $\mu = 0,817$ an, so erhält man

$$dy = -\ 6,92.\ d\mu.\ y.$$

Wenn nun z. B für $\mu = 0,84$ der Ausflusscoefficient bei dem oben angenommenen Querschnittsverhältnisse $(x = 0,95)$ zu finden wäre, so hätte man hiernach $d\mu = 0,84 - 0,8170 = 0,0230$ und sonach $dy = -\ 6,92.\ 0,023.\ y = 0,159.\ y = 0,159.\ 0,197 = 0,031$, folglich den corrigirten Werth von $y = 0,197 - 0,031 = 0,166$ und endlich den in Frage stehenden Ausflusscoefficienten $= 1,166.\ 0,84 = 0,979$.

Da die Versuche, welche der letzten Tabelle zum Grunde liegen, mit verschiedenen Ansatzröhren, denen verschiedene Ausflusscoefficienten auch bei vollkommener Contraction zukommen, angestellt worden sind, so erfordern auch die Werthe in dieser Tabelle noch eine Correction, wenn sie alle einerlei Ausflusscoefficienten bei vollkommen contrahirtem Eintritt in die Röhre entsprechen sollen. So z. B. ist für $x = 0,5$ nach der Tabelle $y = 0,073$; da aber diesem Werthe von x die Röhrenweite von 2,828 Centimeter und dieser Weite nach Tabelle No. XXII. der Ausflusscoefficient 0,823 bei vollkommener Contraction zukommt, so ist die Abweichung von dem zum Grunde liegenden Coefficienten $(0,817)$: $d\mu = -\ 0,823 + 0,817 = -\ 0,006$, und daher die nöthige Correction $dy = -\ 6,92.\ d\mu.\ y = 6,92.\ 0,006.\ y = 0,04.\ y = 0,04.\ 0,073 = 0,003$, weshalb für $x = 0,5$ und für den Ausflusscoefficienten $\mu = 0,817$ die Correction wegen unvollkommener Contraction nicht 0,073, sondern $0,073 + 0,003 = 0,076$, also der Ausflusscoefficient selbst $\mu_{0,5} = 1,076.\ 0,817 = 0,879$ zu setzen ist. Auf dieselbe Weise sind auch alle Werthe der letzten Tabelle abgeändert und so in folgender Tabelle zusammengestellt worden:

Tabelle XXV.

Die Correctionen der Ausflusscoefficienten für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren, bei unvollkommen contrahirtem Eintritt, den Ausflusscoefficienten bei vollkommen contrahirtem Eintritt = 0,8170 gesetzt.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,013	0,027	0,043	0,060	0,080	0,102	0,127	0,152	0,181
1	0,001	0,014	0,029	0,045	0,062	0,082	0,104	0,129	0,155	0,185
2	0,002	0,016	0,030	0,046	0,064	0,085	0,107	0,131	0,158	0,189
3	0,004	0,017	0,032	0,048	0,066	0,087	0,109	0,134	0,160	0,192
4	0,005	0,018	0,033	0,050	0,068	0,088	0,112	0,136	0,163	0,195
5	0,006	0,020	0,035	0,052	0,070	0,090	0,114	0,138	0,166	0,198
6	0,007	0,021	0,036	0,053	0,071	0,093	0,116	0,141	0,170	0,202
7	0,009	0,022	0,038	0,055	0,073	0,095	0,118	0,145	0,173	0,205
8	0,010	0,024	0,040	0,057	0,075	0,097	0,121	0,148	0,176	0,208
9	0,012	0,025	0,041	0,058	0,077	0,099	0,124	0,150	0,178	0,211

Der Gebrauch dieser Tabelle möge durch folgendes Beispiel erläutert werden. Es sei für den relativen Querschnitt $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}62$ der Ausflusscoefficient zu bestimmen, unter der Voraussetzung, dass derselbe für ein unendlich kleines relatives Querschnittsverhältniss $= 0{,}835$ ist. Die letzte Tabelle gibt für $x = 0{,}6$, $y = 0{,}107$; nun ist aber die Abweichung $d\mu = 0{,}835 - 0{,}817 = 0{,}018$, daher folgt die nöthige Correction $dy = - 6{,}92 . 0{,}018 . y = - 0{,}125 . y$; es ist demnach der corrigirte Werth für $y = - 0{,}125 . 0{,}107 = - 0{,}013$, also $y + dy = 0{,}094$ und endlich der gesuchte Ausflusscoefficient

$$\mu_{0,6} = (1 + 0{,}094)\, \mu = 1{,}094 . 0{,}835 = 0{,}913.$$

Noch haben wir einen Versuch über den Ausfluss durch eine kurze, parallelepipedische Ansatzröhre angestellt. Untersuchen wir deshalb, ob das eben aufgefundene Ausflussgesetz auch auf diesen Fall anwendbar ist.

Die hiezu in Anwendung gekommene kurze parallelepipedische Ansatzröhre war 12¼ Centimeter lang und in der Ausmündung 4,217 Centimeter weit und 1,910 Centimeter hoch, es betrug also der Inhalt der letzteren = 8,0544 Quadratcentimeter. Unmittelbar im Wasserkasten sitzend wurden durch zwei, zu verschiedenen Zeiten angestellte Versuche, folgende Resultate erlangt.

Erster Versuch.

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7810$, $h_2 = 0{,}3985$, $h = 0{,}5731$ Meter.

Zeit $\tau = 76{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}8128$, entsprechender Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}5135$.

Unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6342$, $h_2 = 0{,}2360$, $h = 0{,}4110$ Meter.

Zeit $\tau = 93{,}5$ Sec., $\mu = 0{,}8183$, $\zeta = 0{,}4935$.

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3985$, $h_2 = 0{,}1086$, $h = 0{,}2309$ Meter.

Zeit $\tau = 91{,}75$ Sec., $\mu = 0{,}8103$, $\zeta = 0{,}5230$.

Das Mittel aus den drei Ausflusscoefficienten ist $= 0{,}8138$ und aus den drei Widerstandscoefficienten $= 0{,}5100$.

Zweiter Versuch.

Unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7554$, $h_2 = 0{,}3731$, $h = 0{,}5475$ Meter.

Zeit $\tau = 78{,}5$ Sec., Coefficienten: $\mu = 0{,}8105$, $\zeta = 0{,}5223$.

Unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6087$, $h_2 = 0{,}2104$, $h = 0{,}3837$.

Zeit $\tau = 97\frac{1}{4}$ Sec., Coefficienten: $\mu = 0{,}8123$, $\zeta = 0{,}5155$.

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3731$, $h_2 = 0{,}0834$, $h = 0{,}2023$ Meter.

Zeit $\tau = 98$ Sec., Coefficienten: $\mu = 0{,}8097$, $\zeta = 0{,}5253$.

Mittlerer Ausflusscoefficient $= 0{,}8108$, mittlerer Widerstandscoefficient $= 0{,}5210$.

Aus beiden Versuchen folgt nun der mittlere Werth des Ausflusscoefficienten: $\mu = 0{,}8123$, und der des Widerstandscoefficienten: $\zeta = 0{,}5155$.

Sass diese kurze Ansatzröhre im Ende des aus dem Obigen (unter 2) bekannten längeren und weiteren parallelepipedischen Messingrohres, so stellte sich durch die Ausflussversuche Folgendes heraus.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7843$, $h_2 = 0{,}4018$, $h = 0{,}5772$ Meter.

Zeit $\tau = 74{,}25$ Sec., hiernach folgt für die Röhrenverbindung:

$$\mu_2 = 0{,}8350 \text{ und } \frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4342.$$

Nun ist aber für das lange Rohr (s. Seite 83) $\zeta = 0{,}6550$, und $\frac{a}{a_1} = \frac{8{,}0544}{12{,}4350} = 0{,}64772$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}41954$, demnach folgt der Röhrenwiderstand $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6550.\ 0{,}41954 = 0{,}2748$: es bleibt sonach für die kurze Röhre: $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}4342 - 0{,}2748 = 1{,}1594$ und der gesuchte Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}1594}} = 0{,}9287.$$

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4018$, $h_2 = 0{,}1119$, $h = 0{,}2344$ Meter.

Zeit $\tau = 88$ Sec., entsprechende Werthe: $\mu_2 = 0{,}8383$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4231$.

Für das Rohr allein ist $\zeta = 0{,}6364$, folglich $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6364.\ 0{,}4195 = 0{,}2670$, es bleibt sonach für die kurze Ansatzröhre $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}4231 - 0{,}2670 = 1{,}1561$ und $\mu = 0{,}9300$.

Noch wurde auch diese kurze Ansatzröhre an das Ende einer Verbindung von dem längeren messingnen und dem langen Eisenrohre eingesetzt und bei grösserem Drucke ein Ausflussversuch angestellt. Hier war $h_1 = 0{,}7921$, $h_2 = 0{,}4096$, $h = 0{,}5852$ Meter, ferner $\tau = 79$ Sec., weshalb zunächst $\mu_2 = 0{,}7794$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}6461$ sich ergeben.

Für die Rohrverbindung ohne die kurze Ansatzröhre war $\tau = 56\frac{1}{4}$ Sec., und da für dieselbe der Inhalt der Mündung $= 12{,}490$ Quadratcentimeter betrug, so war $\mu_1 = 0{,}7028$ und $\zeta = \frac{1}{\mu_1{}^2} - 1 = 1{,}0247$. Hieraus folgt nun $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 1{,}0247 . \left(\frac{8{,}0544}{12{,}490}\right)^2 = 1{,}0247 . 0{,}4159 = 0{,}4261$, und für die kurze Röhre allein $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2200$, $\mu = 0{,}9054$.

Das Mittel aus den drei gefundenen Werthen für μ ist $= 0{,}9214$. Dasselbe Mundstück sitzend in der grossen ebenen Wandfläche gab $\mu = 0{,}8123$, daher ist die Abweichung wegen der unvollkommenen Contraction beim Eintritt $= 0{,}9054 - 0{,}8123 = 0{,}0931$, und der relative Werth derselben: $y = \frac{0{,}0931}{0{,}8123} = 0{,}1151$.

Unsere Tabelle gibt für kurze runde cylindrische Ansatzröhre vom relativen Inhalte $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}65$, $y = 0{,}114$, und da noch wegen der Abweichung $0{,}8170 - 0{,}8123 = 0{,}0046$ der Ausflusscoefficienten bei vollkommen contrahirtem Eintritt die Correction $= 6{,}9 . 0{,}0046 . 0{,}114 = 0{,}0032$ nöthig ist, so folgt eigentlich $y = 0{,}114 + 0{,}003 = 0{,}117$. Die Abweichung dieses Werthes von dem oben gefundenen (0,115) für kurze parallelepipedische Ansatzröhren ist kleiner als man erwarten konnte.

Eine weitere Frage ist nun: wie stimmt die oben gefundene Formel für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren mit den letzten Beobachtungen zusammen?

Diese Formel ist

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}0765 . \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}} .$$

Prüfen wir dieselbe in folgenden Beispielen.

Für das Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}5$ ist beim Ausfluss durch kreisrunde Mündungen in der dünnen Wand nach Tab. XV. $y = 0{,}134$, und legen wir nun den mittleren Ausflusscoefficienten bei vollkommener Contraction $\mu_0 = 0{,}6132$ zum Grunde, so erhalten wir den entsprechenden Ausflusscoefficienten

$$\mu_{0{,}5} = \mu_0 (1 + y) = 0{,}6132 . 1{,}134 = 0{,}6953,$$

und folglich den Contractionscoefficienten

$$\alpha_{0{,}5} = 1{,}0406 . 0{,}6953 = 0{,}7235.$$

Die Formel gibt nun

$$\mu_{0,5} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,0765\left(\frac{1}{0,7235}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,7235} - 1\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,14614 + 0,14605}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,29219}} = 0,8797.$$

Nach unserer letzten Tabelle ist für den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren $y = 0,080$, demnach $\mu_{0,5} = 1,080.\ \mu_0$ oder, für μ den mittleren Werth 0,8170 gesetzt,

$$\mu_{0,5} = 1,080.\ 0,8170 = 0,8824.$$

Die Abweichung 0,8797 — 0,8824 = — 0,0027 von dem berechneten Werthe ist höchst unbedeutend.

Setzen wir noch einmal $\frac{a}{a_1} = 0,75$ und für die Mündung in der dünnen Wand μ_0 wieder $= 0,6132$, dann gibt die Tabelle No. XV. $y = 0,303$ und es berechnet sich

$$\mu_{0,75} = 1,303.\ 0,6132 = 0,7990 \text{ und}$$

$$\alpha_{0,75} = 1,0406.\ 0,7990 = 0,8314.$$

Die Formel gibt den Ausflusscoefficienten für kurze cylindrische Ansatzröhren

$$\mu_{0,75} = \left(1 + \frac{0,0765}{(0,8314)^2} + \left(\frac{1 - 0,8314}{0,8314}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 0,11067 + 0,04113)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,15180}} = 0,9318.$$

Nach der letzten Tabelle ist aber für $\frac{a}{a_1} = 0,75$, $y = 0,138$, daher lässt sich setzen

$$\mu_{0,75} = 1,138.\ 0,8170 = 0,9297.$$

Die Abweichung vom nach der Formel bestimmten Werthe ist nur 0,9318 — 0,9297 = 0,0021, also wieder ganz unbedeutend.

Man hat hiernach vollkommen Ursache, die Uebereinstimmung der theoretisch bestimmten Formel für die Ausflusscoefficienten bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren mit den Erfahrungen als ausreichend anzusehen.

Ausser den oben rapportirten Versuchen über den Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren im Ende einer weiteren längeren Röhre wurden auch andere angestellt, bei welchen diese Ansatzröhren in einander gesteckt waren. Die hiernach berechneten Ausflusscoefficienten haben sich hier fast immer so herausgestellt, wie bei Anwendung einer längeren Leitungsröhre, und aus diesem Grunde rapportiren wir denn auch im Folgenden nur die Hauptergebnisse im Auszuge von den hiermit angestellten Versuchen.

Verbindung der Mundstücke No. 3 und No. 5, in No. 5 einfliessend und durch No. 3 ausfliessend. S. Fig. 4 Tafel I.

Der Durchmesser der Ausmündung war 2,694 Centimeter, demnach der Inhalt derselben: $a = 5{,}7001$ Quadratcentimeter; für No. 5 ist aber dieser Inhalt $a = 8{,}5634$ Quadratcentimeter, demnach folgt das Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}66564$ und $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}44308$.

Beim grösseren Drucke war $\mu_2 = 0{,}8394$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4179$; nun gab aber die Ansatzröhre No. 5 allein $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}4981$, also $\zeta = 0{,}4981$, demnach ist wegen des Widerstandes in diesen $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4981 . 0{,}4431 = 0{,}2207$ abzuziehen und es bleibt sonach für No. 3 allein $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}1972$ und $\mu = 0{,}9139$.

Beim mittleren Drucke wurde $\mu_2 = 0{,}8380$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4241$ gefunden; hiervon den Widerstand $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4946 . 0{,}4431 = 0{,}2191$ abgezogen, folgt $\frac{1}{\mu^2} = 0{,}2050$ und $\mu = 0{,}9110$.

Beim kleineren Drucke fand man $\mu_2 = 0{,}8391$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}4204$; subtrahirt man wegen des Widerstandes in No. 5 hiervon $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4911 . 0{,}4431 = 0{,}2176$, so bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2028$ und $\mu = 0{,}9118$.

Das Mittel aus den gefundenen Werthen für μ ist $= 0{,}9122$; aber für den vollkommen contrahirten Eintritt in No. 3 wurde weiter oben $\mu = 0{,}8129$ gefunden, also ist hiernach

$$\frac{\mu_{0,6656} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}9122 - 0{,}8129}{0{,}8129} = \frac{0{,}0993}{0{,}8129} = 0{,}1221.$$

Die Tabelle No. XXV. gibt für $x = 0{,}6656$, y oder $\frac{\mu_{0,6656} - \mu}{\mu} = 0{,}117$, welcher Werth jedoch wegen der Abweichung des Coefficienten 0,8129 von dem der Tabelle zum Grunde gelegten 0,8170 noch um $7 . (0{,}8170 - 0{,}8129) . 0{,}117 = 7 . 0{,}0041 . 0{,}117 = 0{,}003$ zu vergrössern, also in 0,120 umzuändern ist. Die Abweichung des eben aus den Versuchen berechneten Werthes 0,122 hiervon ist unbedeutend.

Die kurze Ansatzröhre No. 2 in dem Ende der vorigen aus den Röhren No. 3 und 5 bestehenden Zusammensetzung befindlich. S. Fig. 7 Taf. I.

Hier ist für den Eintritt aus No. 3 in No. 2 das Querschnittsverhältniss

$$\frac{a}{a_1} = \frac{2{,}9377}{5{,}7001} = 0{,}51537 \text{ und } \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2656.$$

Beim grösseren Drucke war $\mu_2 = 0{,}8568$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 1{,}3623$, hiervon subtrahirt den Widerstand der Verbindung von No. 3 und 5: $\zeta \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4179 . 0{,}2656 = 0{,}1110$, bleibt für die Röhre No. 2 allein: $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2513$ und $\mu = 0{,}8940$.

Unter mittlerem Drucke ausfliessend war $\mu_2 = 0{,}8579$ und $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}3588$. Nun ist aber der Röhrenwiderstand $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4241 \,.\, 0{,}2656 = 0{,}1126$ abzuziehen, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2462$, und $\mu = 0{,}8958$.

Unter kleinerem Drucke ausfliessend war $\mu_2 = 0{,}8605$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}3505$, aber $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4204 \,.\, 0{,}2656 = 0{,}1117$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2388$ und $\mu = 0{,}8995$.

Der mittlere Werth von μ oder vielmehr von $\mu_{0{,}5154}$ ist hiernach $= 0{,}8964$; dieselbe Röhre No. 2 in der grossen Wand gab $\mu = 0{,}8323$, demnach folgt $y = \frac{0{,}8964 - 0{,}8323}{0{,}8323} = \frac{0{,}0641}{0{,}8323} = 0{,}0770$.

Nach Tab. XXV. ist für $x = 0{,}5154$, $y = 0{,}084$; wegen der Abweichung des Coefficienten 0,8323 von 0,8170 ist dieser Werth noch um $7 \,.\, (0{,}8323 - 0{,}8170)\, y = 7 \,.\, 0{,}0153 \,.\, 0{,}084 = 0{,}008$ zu vermindern, daher bleibt $y = 0{,}076$, welches mit dem aus Versuchen bestimmten Werthe 0,077 wieder sehr zusammenstimmt.

Die Verbindung der Ansatzröhren No. 3 und No. 5 im Ende des längeren Messingrohres gab folgende Resultate.

Bei grösserem Drucke $\mu_2 = 0{,}8418$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}4112$. Noch war für den Uebergang aus No. 3 in No. 5 $\frac{a}{a_1} = \frac{5{,}6074}{8{,}5634} = 0{,}65482$ und $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4288$, ferner für die Röhre No. 5 im Messingrohr allein $\zeta = 0{,}4790$, daher ist zu subtrahiren: $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}479 \,.\, 0{,}4288 = 0{,}2054$, und es bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}4112 - 0{,}2054 = 1{,}2058$, endlich $\mu = 0{,}9107$.

Bei kleinerem Drucke: $\mu_2 = 0{,}8416$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}4120$. Hiervon geht ab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}4605 \,.\, 0{,}4288 = 0{,}1974$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2146$ und $\mu = 0{,}9074$.

Das Mittel aus beiden μ ist $= 0{,}9090$.

Für den Fall, dass die Röhre No. 3 in der grossen Wandfläche sitzt, ist $\mu = 0{,}8129$, daher folgt $y = \frac{0{,}9090 - 0{,}8129}{0{,}8129} = 0{,}118$.

Der aus Tabelle No. XXV. genommene Werth 0,115 noch um 0,003 verbessert gibt $y = 0{,}118$, also eine vollständige Uebereinstimmung.

Die vorige Verbindung aus No. 3 und No. 5 im Ende der an das längere Messingrohr angesetzten langen Eisenröhre.

Bei grösserem Drucke stellte sich Folgendes heraus: $\mu_2 = 0{,}8202$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1{,}4865$, ferner $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6451 \,.\, 0{,}4288 = 0{,}2766$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2099$ und $\mu = 0{,}9091$.

Bei kleinerem Drucke war $\mu_2 = 0,8229$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1,4766$, aber $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,6806 \,.\, 0,4288 = 0,2918$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,1848$ und $\mu = 0,9187$.

Das Mittel aus beiden Werthen für μ ist 0,9139, demnach $y = \frac{0,9139 - 0,8129}{0,8129} = \frac{0,1010}{0,8129} = 0,124$, welcher Werth allerdings etwas zu gross ist.

Folgender Versuch mit einem sehr grossen Querschnittsverhältniss gewährt eine sehr zufriedenstellende Uebereinstimmung.

Das Mundstück No. 3, angesetzt an das Ende der im längeren Messingrohre befindlichen kurzen Ansatzröhre No. 4.

Hier ist das Querschnittsverhältniss beim Uebergang des Wassers aus No. 4 in No. 3: $\frac{a}{a_1} = 0,8692$ und dessen Quadrat: $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,7555$. Es ergab sich bei höherem Drucke: $\mu_2 = 0,8328$, $\frac{1}{\mu_2^2} = 1,4419$; wegen des Widerstandes in den Zuleitungsröhren geht aber ab: $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,3158$, daher bleibt für die Ansatzröhre No. 3 allein übrig: $\frac{1}{\mu^2} = 1,1261$ und $\mu = 0,9423$. Bei niedrigerem Drucke war $\mu_2 = 0,8326$ und $\frac{1}{\mu_2^2} = 1,4426$; hiervon geht ab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,3101$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1,1325$ und $\mu = 0,9397$.

Der mittlere Werth für μ ist hiernach $= 0,9410$, und folglich $y = \frac{0,9410 - 0,8129}{0,8129} = 0,158$. Die Tabelle No. XXV. gibt aber für $x = \frac{a}{a_1} = 0,869$, $y = 0,173$, also etwas mehr.

Es möchte überflüssig sein, die Ergebnisse mehrerer anderer Versuche ähnlicher Art hier mitzutheilen, da sie immer leidlich und zum Theil sehr gut mit den oben angegebenen übereinstimmen.

---

2) Ausfluss unter Wasser.

Mit dem Ausflusse unter Wasser, wo die Ansatzröhren wenig über dem Boden in einer mit Wasser angefüllten Vorlage ausmündeten, wurden folgende wenige Versuche angestellt.

Das einfache längere Messingrohr unter Wasser ausmündend.

Hier war $a = a_1 = 12,768$ Quadratcentimeter, der anfängliche Niveauabstand beider Wasserspiegel: $h_1 = 0,5755$ Meter, der endliche $h_2 = 0,1932$ Meter, und die entsprechende Ausflusszeit $t = 63,75$ Sec. Hiernach folgt die mittlere Druckhöhe $h = 0,3589$, der Ausflusscoefficient $\mu = 0,7776$ und der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,6537$.

Das Mundstück No. 5 am Ende des Messingrohres unter Wasser ausmündend.

Hier ist $\frac{a}{a_1} = 0,6846$, $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0,4686$, ferner war $h_1 = 0,5755$, $h_2 = 0,1932$ und $t = 89,75$ Sec., daraus folgt $h = 0,3589$, $\mu_2 = 0,8069$ und $\frac{1}{\mu_2^2} = 1,5360$.

Hiervon den Widerstand des Messingrohres $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}6537 . 0{,}4686 = 0{,}3063$ abgezogen bleibt für die Ansatzröhre No. 5 allein:

$$\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2297 \text{ und } \mu = 0{,}9018.$$

Das Mundstück No. 3 im Messingrohrende.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}4392$, Quadrat hiervon $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1929$, Druckhöhen wie oben, Ausflusszeit $\tau = 137{,}5$ Sec.

Hiernach ist $\mu_2 = 0{,}8209$ und $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1{,}4838$; aber $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1248$ abgezogen, bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}3590$ und $\mu = 0{,}8578$.

Das letzte Mundstück No. 3 in der Ansatzröhre No. 5 und diese in der Ausmündung des längeren Messingrohres sitzend.

Es ist hier $\frac{a}{a_1} = 0{,}66564$ und $\left(\frac{a}{g_1}\right)^2 = 0{,}44308$, die Druckhöhen aber sind die obigen. Die Ausflusszeit war $\tau = 135{,}5$ Sec., deshalb $\mu_2 = 0{,}8331$ und $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1{,}4410$. Hiervon geht ab $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2298$, es bleibt sonach $\frac{1}{\mu^2} = 1{,}2112$ und $\mu = 0{,}9086$.

Das Mundstück No. 2 in die Ausmündung der letzten, aus den Ansatzröhren No. 3 und No. 5 und dem längeren Messingrohre bestehenden Verbindung eingesetzt.

Hier ist $\frac{a}{a_1} = 0{,}51537$ und $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}2656$, die Druckhöhen sind die obigen, die Ausflusszeit aber war $= 253$ Sec., hiernach stellt sich heraus: $\mu_2 = 0{,}8516$ und $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1{,}3788$; aber ab geht $\zeta\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = 0{,}1171$, daher bleibt $\frac{1}{\mu^2} = 0{,}2617$ und $\mu = 0{,}8903$.

Wiewohl noch mehr Versuche über den Ausfluss unter Wasser angestellt worden sind, so halten wir es doch nicht für nöthig, deren Ergebnisse hier mitzutheilen. Die so eben angeführten Resultate zeigen auch wieder, wenn man dieselben mit dem Ausfluss in die freie Luft vergleicht, dass die Ausflusscoefficienten für den Ausfluss unter Wasser um 1 Procent und mehr kleiner sind als die Ausflusscoefficienten für den Ausfluss in die freie Luft. Das einfache längere Messingrohr gab im ersten Falle $\mu = 0{,}7776$, im zweiten aber $= 0{,}7964$, das Mundstück No. 5 in diesem Rohr gab im ersten Falle $\mu = 0{,}9018$, im zweiten $= 0{,}9096$, das Mundstück No. 3 in der vorigen Verbindung im ersten Falle $\mu = 0{,}9086$, im zweiten $= 0{,}9139$, die kurze Ansatzröhre No. 2 gab endlich im ersten Falle $\mu = 0{,}8903$, im zweiten $= 0{,}8940$; immer sind also die Ausflusscoefficienten im letzten Falle grösser als im ersten, und es lässt sich wohl annehmen, dass, wie beim Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand, die Ausflusscoefficienten beim Ausfluss unter Wasser 1¼ Procent kleiner zu setzen sind als beim Ausfluss in die freie Luft.

C. Versuche über die unvollkommene Contraction beim Durchgang des Wassers durch Verengungen.

1) Kreisförmige Verengungen im cylindrischen Rohre.

a) Verengungen beim Eintritt in das Rohr.

Die unter (*A*, 1) aufgeführten Mündungen in der dünnen Wand wurden grösstentheils auch in die Einmündung des längeren Messingrohres eingesetzt, wie Fig. 8 Taf. I. vor Augen führt. Die äussere Stirnfläche dieser Mündungen fiel in die grosse ebene Wandfläche, so dass beim Eintritt des Wassers in das Rohr vollkommene Contraction eintreten musste. War nun die Mündung sehr klein in Hinsicht auf den Röhrenquerschnitt, so legte sich der contrahirte Wasserstrahl gar nicht an die Röhrenwand an, und das Wasser floss dann gerade so aus, als wenn die Röhre gar nicht vorhanden gewesen wäre; um aber das Wasser zum Anschluss an die Röhre zu nöthigen und einen Ausfluss bei gefülltem Röhrenquerschnitt herbeizuführen, wurde entweder die aus dem Obigen bekannte Eisenröhre an die Messingröhre angeschoben, oder, wenn dies nicht gelang, ein Wasserkasten angesetzt und dadurch der Ausfluss unter Wasser herbeigeführt, oder endlich ein enges Mundstück zugleich noch in die Ausmündung des Rohres eingesetzt. Zuweilen erfolgte der Ausfluss in die freie Luft sehr schwankend und stossweisse, auch ging dieser wohl plötzlich in einen Ausfluss bei ungefülltem Querschnitte über, doch sind solche Versuche bei folgenden Rechnungen nicht zum Grunde gelegt worden.

Mündung No. 1. Ausfluss durch das einfache Messingrohr unter Wasser.

Inhalt der Mündung: $a = 0{,}58901$ Quadratcentimeter; ihr Verhältniss zum Röhrenquerschnitt: $\frac{a}{a_1} = 0{,}046132$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5790$, $h_2 = 0{,}4352$, $h = 0{,}5045$ Meter.

Ausflusszeit $t = 519$ Secunden, hiernach berechnete Coefficienten:

$\mu_2 = 0{,}03030$ und $\zeta_2 = 1088{,}11$.

Der Reibungswiderstand der Röhre ist nach dem Frühern $\zeta_1 = 0{,}086$; deshalb bleibt für den Durchgang durch die Mündung und den Anschluss an die Röhre der Widerstandscoefficient: $\zeta = 1088$ und der Ausflusscoefficient: $\mu = 0{,}03030$.

Mündung No. 3. Ausfluss durch die Eisenröhre unter Wasser.

Inhalt $a = 1{,}19597$, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}093202$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5855$, $h_2 = 0{,}2065$, $h = 0{,}3718$.

Zeit $t = 790{,}5$ Sec.; hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}06077$ und $\zeta_2 = 270{,}75$; hiervon $\zeta_1 = 0{,}45$ wegen des Röhrenwiderstandes, bleibt $\zeta = 270{,}30$ und $\mu = 0{,}06084$.

Mündung No. 4. Ausfluss in die freie Luft durch die an dem Ende des Messingrohres sitzende kurze cylindrische Ansatzröhre No. 5.

Inhalt der Verengung $a = 1{,}79553$ Quadratcentimeter.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}14063$.

Inhalt der Ausmündung $a_2 = 8{,}7406$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a_2}{a_1} = 0{,}68457$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7750$, $h_2 = 0{,}3965$, $h = 0{,}5698$ Meter.

Zeit $\tau = 416{,}5$ Sec.; hiernach $\mu_2 = 0{,}1368$, und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 53{,}434$. Nun ist aber für die kurze Ansatzröhre allein der Röhrenwiderstand $\zeta_1 = 0{,}209$, demnach bleibt für den übrigen Apparat $\zeta = 52{,}434 - 0{,}209 = 52{,}225$, oder, da das Wasser im langen Rohre nur $\frac{a_2}{a_1} = 0{,}68457$ mal so schnell fliesst, der Widerstand für den Ausfluss durch die weite Röhre $= \frac{52{,}225}{(0{,}68457)^2} = 111{,}44$.

Zieht man hiervon noch den Röhrenwiderstand 0,09 ab, so bleibt für die blosse Verengung der Widerstandscoefficient $\zeta = 111{,}35$ und der entsprechende Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}09434$.

Die vorige Mündung (No. 4.) Ausfluss in die freie Luft durch das im Ende des Messingrohres befindliche Mundstück No. 11.

Inhalt der Ausmündung: $a_2 = 6{,}5054$ Quadratcentimeter, Verhältniss derselben zum Röhrenquerschnitt: $\frac{a_2}{a_1} = 0{,}50950$. Druckhöhen die vorigen, Ausflusszeit $\tau = 423\frac{1}{2}$ Sec. Hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}1808$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 30{,}602$. Nun ist aber für die Ausmündung (a_2) allein $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}543$, daher bleibt $\frac{1}{\mu_2{}^2} - \frac{1}{\mu_1{}^2} = 29{,}059$. Durch das Quadrat des Querschnittsverhältnisses dividirt, bleibt $\left(\frac{1}{\mu_2{}^2} - \frac{1}{\mu_1{}^2}\right) : \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \frac{29{,}059}{0{,}25959} = 111{,}93$, und endlich hiervon subtrahirt den Röhrenwiderstand 0,09, bleibt für den Durchgang durch No. 4: $\zeta = 111{,}84$ und $\mu = 0{,}09414$.

Die Uebereinstimmung der beiden letzten Versuche ist überraschend gut.

Mündung No. 5. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt $a = 2{,}38334$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}18666$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7749$, $h_2 = 0{,}3921$, $h = 0{,}5674$ Meter.

Zeit $\tau = 310\frac{1}{2}$ Sec., hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}12715$ und $\zeta_2 = 60{,}856$; hiervon wegen des Röhrenwiderstandes 0,086 abgezogen, bleibt für die Verengung allein $\zeta = 60{,}770$ und $\mu = 0{,}1272$.

Mündung No. 6. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt $a = 3{,}0388$ Quadratcentimeter, relativer Werth desselben $\frac{a}{a_1} = 0{,}23800$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7753$, $h_2 = 0{,}3929$, $h = 0{,}5680$ Meter.

Zeit $\tau = 234$ Sec., hieraus berechnet: $\mu_2 = 0{,}1684$, $\zeta_2 = 34{,}24$; hiervon wegen des Röhrenwiderstandes 0,09, bleibt für die Verengung allein $\zeta = 34{,}15$ und $\mu = 0{,}1687$.

Mündung No. 6. Ausfluss durch die angesetzte Eisenröhre in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7768$, $h_2 = 0{,}3945$, $h = 0{,}5696$ Meter.

Zeit $\tau = 237\frac{1}{2}$ Sec., hieraus ermittelt: $\mu_2 = 0{,}1649$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 36{,}79$; aber der Röhrenstand ist 0,43, daher bleibt $\zeta = 35{,}36$ und $\mu = 0{,}1658$.

Mündung No. 9. Durch das einfache Rohr unter Wasser ausfliessend.

Inhalt $a = 4,8695$ Quadratcentimeter, relativer Werth desselben: $\frac{a}{a_1} = 0,38139$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,5785$, $h_2 = 0,1995$, $h = 0,3646$ Meter.

Zeit $\tau = 168,5$ Sec.; hieraus gefunden: $\mu_2 = 0,2895$; $\frac{1}{\mu_2^2} = 11,934$; hiervon $\zeta_2 = 0,089$, bleibt für die blosse Verengung

$\zeta = 10,845$ und $\mu = 0,2905$.

Mündung No. 10. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt $a = 5,5823$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,43727$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7793$, $h_2 = 0,4003$, $h = 0,5742$ Meter.

Zeit $\tau = 114$ Sec., hiernach berechnet: $\mu_2 = 0,3408$ und $\zeta_2 = 7,608$; hiervon $\zeta_1 = 0,086$ ab, bleibt $\zeta = 7,522$ und $\mu = 0,3426$.

Mündung No. 11. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt der Verengung $a = 6,5054$ Quadratcentimeter, ihr Verhältniss zum Röhrenquerschnitt: $\frac{a}{a_1} = 0,50950$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7723$, $h_2 = 0,3938$, $h = 0,5672$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 95,5$ Sec.; hieraus hat sich ergeben: $\mu_2 = 0,4088$, $\zeta_2 = 4,984$, hiervon $\zeta_1 = 0,086$, bleibt $\zeta = 4,898$ und $\mu = 0,4118$.

Mündung No. 12. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt der Eintrittsöffnung $a = 7,4264$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,58164$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7749$, $h_2 = 0,3921$, $h = 0,5674$ Meter.

Zeit $\tau = 82\frac{1}{2}$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0,4785$ und $\zeta_2 = 3,367$; hiervon $\zeta_1 = 0,086$, bleibt $\zeta = 3,281$ und $\mu = 0,4833$.

Unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3921$, $h_2 = 0,1024$, $h = 0,2238$ Meter.

Zeit $\tau = 100$ Sec., $\mu_2 = 0,4759$, $\zeta_2 = 3,415$; hiernach bleibt $\zeta = 3,329$ und $\mu = 0,4806$.

Mündung No. 13. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Inhalt der verengerten Eintrittsmündung: $a = 8,3137$ Quadratcentimeter. Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,65113$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7800$, $h_2 = 0,4005$, $h = 0,5637$ Meter.

Zeit $\tau = 72\frac{1}{2}$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0,5365$ und $\zeta_2 = 2,475$, aber $\zeta_1 = 0,086$, daher bleibt für die Verengung allein $\zeta = 2,389$ und $\mu = 0,5432$.

Mündung No. 13. Ausfluss durch das einfache Messingrohr unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5790$, $h_2 = 0{,}2000$, $h = 0{,}3694$ Meter.

Zeit $\tau = 89{,}5$ Secunden, hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}5446$ und $\zeta_2 = 2{,}372$; hiervon $\zeta_1 = 0{,}086$, bleibt $\zeta = 2{,}286$ und $\mu = 0{,}5517$.

Mündung No. 14. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Querschnitt $a = 9{,}0952$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}71235$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7793$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5742$ Meter.

Zeit $\tau = 65{,}25$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}5955$, $\zeta_2 = 1{,}820$; hiervon $\zeta_1 = 0{,}086$, bleibt $\zeta = 1{,}734$ und $\mu = 0{,}6048$.

Mündung No. 15. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Querschnitt $a = 10{,}1561$ Quadratcentimeter, Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}79544$.

Erste Beobachtung.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3938$, $h = 0{,}5673$ Meter.

Zeit $\tau = 59$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}6617$, $\zeta_2 = 1{,}284$; $\zeta_1 = 0{,}086$ abgezogen, bleibt $\zeta = 1{,}198$ und $\mu = 0{,}6745$.

Zweite Beobachtung.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3938$, $h_2 = 0{,}1073$, $h = 0{,}2281$ Meter.

Zeit $\tau = 70\frac{1}{4}$ Sec., folglich $\mu_2 = 0{,}6637$, $\zeta_2 = 1{,}270$, endlich $\zeta = 1{,}184$ und $\mu = 0{,}6767$.

Mündung No. 16. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Querschnitt $a = 10{,}6535$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}83439$.

Erste Beobachtung.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7749$, $h_2 = 0{,}3921$, $h = 0{,}5674$ Meter.

Zeit $\tau = 57\frac{1}{2}$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}6866$ und $\zeta_2 = 1{,}121$, so wie $\zeta = 1{,}035$ und $\mu = 0{,}6978$.

Zweite Beobachtung.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3921$, $h_2 = 0{,}1024$, $h = 0{,}2238$ Meter.

Zeit $\tau = 68{,}5$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}6948$, $\zeta_2 = 1{,}071$, und hiernach wieder $\zeta = 0{,}985$ und $\mu = 0{,}7098$.

Die durch diese Versuche gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf folgende Weise tabellarisch zusammenstellen.

Tabelle XXVI.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,0461	0,0932	0,1406	0,1867	0,2380	0,3814	0,4373
Widerstandscoefficient ζ.	1088	270,7	111,64	60,77	34,75	10,845	7,522
Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,5095	0,5816	0,6511	0,7123	0,7954	0,8344	1,000
Widerstandscoefficient ζ.	4,898	3,305	2,337	1,734	1,191	1,010	0,505

Sind über den Durchgang durch einerlei Verengung zwei Versuche angestellt worden, so hat man in der vorstehenden Tabelle das Mittel aus den Ergebnissen aufgenommen. Der Werth $\zeta = 0{,}505$ ist aus dem Ausflusscoefficienten $\mu = 0{,}815$ für kurze cylindrische Ansatzröhren genommen worden.

Es ist nun die Frage: wie stimmt die Theorie mit diesen Ergebnissen zusammen?

Ist v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre und v_1 die Eintrittsgeschwindigkeit im contrahirten Querschnitte, so hat man der Theorie zufolge den Druckhöhenverlust $= \frac{(v_1 - v)^2}{2g}$.

Nun ist aber $a_1 v = \alpha a v_1$, insofern α den Contractionscoefficienten bezeichnet, daher folgt $v_1 = \frac{a_1}{\alpha a} v$ und obiger Verlust $= \left(\frac{a_1}{\alpha a} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$, also der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{a_1}{\alpha a} - 1\right)^2,$$

und umgekehrt, der einem bekannten Widerstandscoefficienten entsprechende Contractionscoefficient:

$$\alpha = \frac{a_1}{a\,(1 + \sqrt{\zeta})} = \frac{1}{\frac{a}{a_1}\,(1 + \sqrt{\zeta})}.$$

Setzt man in diese Formel für $\frac{a}{a_1}$ und ζ die oben gefundenen 14 Paar Werthe ein, so erhält man für den Contractionscoefficienten folgende Reihe von Werthen:

Tabelle XXVI*.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,0461	0,0932	0,1406	0,1867	0,2380	0,3814	0,4373
Contractionscoefficient α.	0,6383	0,6148	0,6033	0,6090	0,6094	0,6107	0,6110
Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,5095	0,5816	0,6511	0,7123	0,7954	0,8344	1,000
Contractionscoefficient α.	0,6108	0,6101	0,6074	0,6046	0,6012	0,5977	0,5846

Die unbedeutenden Abweichungen dieser Contractionscoefficienten unter einander weisen eine recht gute Uebereinstimmung der Theorie mit den gemachten Beobachtungen nach, und man kann deshalb auch mit Hilfe der theoretischen Formel noch beliebig viele Glieder zu den durch die vorstehenden Tabellen gegebenen Reihen interpoliren.

Zunächst können wir das Wachsen der Contractionscoefficienten α durch eine gerade Linie ausdrücken, also

$$\alpha = A + B\left(\frac{a}{a_1}\right)$$

setzen, wobei A und B auszumittelnde Erfahrungszahlen sind. Die unbedeutende Veränderlichkeit der Werthe von α erlaubt uns, zur Bestimmung von A und B das einfachste Verfahren anzuwenden. Setzen wir deshalb die oben angegebenen 14 Paar Werthe in diese Gleichung ein und addiren wir die so erhaltenen 14 Gleichungen zu je sieben, so erhalten wir zwei Gleichungen, die wir nun zur Bestimmung von A und B anwenden können.

Diese Bestimmungsgleichungen sind

$$0{,}6138 = A + 0{,}2176\ B \text{ und}$$
$$0{,}6023 = A + 0{,}7263\ B,$$

und aus ihnen folgt nun

$$B = -\frac{0{,}115}{0{,}5087} = -0{,}0226 \text{ und}$$
$$A = 0{,}6187,$$

also die gesuchte Function:

$$\alpha = 0{,}6187 - 0{,}0226.\ \frac{a}{a_1}.$$

Wenn man nun in diese Gleichung die Werthe 0,01, 0,02, 0,03 u. s. w. bis 1,00 für $\frac{a}{a_1}$ einsetzt, so bekommt man eine Reihe von Werthen für α, aus welcher sich wieder durch Substitution in die Formel $\zeta = \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ die in Frage stehende Reihe von Werthen der Widerstands-

coefficienten berechnen lässt. So gibt z. B. $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0,6187 - 0,0011 = 0,6074$, und hieraus folgt wieder der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{2}{0,6074} - 1\right) = \left(\frac{1,3926}{0,6074}\right)^2 = 5,257.$$

Folgende Tabellen enthalten eine Zusammenstellung der auf diese Weise gewonnenen Resultate.

Tabelle XXVII.

Die Contractionscoefficienten für den verengten Eintritt des Wassers in cylindrische Ansatzröhren.

Zehntel.

Hundertel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,6187	0,6164	0,6142	0,6119	0,6097	0,6074	0,6051	0,6029	0,6006	0,5984
1	0,6185	0,6162	0,6140	0,6117	0,6094	0,6072	0,6049	0,6027	0,6004	0,5981
2	0,6183	0,6160	0,6137	0,6115	0,6092	0,6070	0,6046	0,6024	0,6002	0,5979
3	0,6180	0,6158	0,6135	0,6112	0,6090	0,6067	0,6044	0,6022	0,6000	0,5977
4	0,6178	0,6155	0,6133	0,6110	0,6088	0,6065	0,6042	0,6020	0,5998	0,5975
5	0,6176	0,6153	0,6131	0,6108	0,6086	0,6063	0,6040	0,6018	0,5995	0,5972
6	0,6173	0,6151	0,6128	0,6106	0,6083	0,6060	0,6038	0,6015	0,5993	0,5970
7	0,6171	0,6149	0,6126	0,6104	0,6081	0,6058	0,6036	0,6013	0,5990	0,5968
8	0,6169	0,6146	0,6124	0,6101	0,6079	0,6056	0,6033	0,6011	0,5988	0,5966
9	0,6167	0,6144	0,6122	0,6099	0,6076	0,6054	0,6031	0,6009	0,5986	0,5963

Tabelle XXVIII.

Die Widerstandscoefficienten für den verengten Eintritt des Wassers in cylindrische Ansatzröhren.

Zehntel.

Hundertel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	∞	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734
1	25819	189,2	45,64	18,26	9,019	4,969	2,924	1,787	1,116	0,701
2	6379	157,0	41,05	16,90	8,455	4,702	2,780	1,705	1,064	0,669
3	2802	132,1	37,05	15,66	7,942	4,449	2,644	1,625	1,016	0,638
4	1558	112,5	33,57	14,55	7,468	4,216	2,515	1,549	0,970	0,609
5	984,9	96,72	30,51	13,52	7,027	3,994	2,393	1,477	0,926	0,582
6	675,9	83,92	27,84	12,60	6,625	3,788	2,278	1,411	0,884	0,556
7	490,6	73,39	25,46	11,75	6,243	3,592	2,169	1,345	0,845	0,529
8	371,0	64,63	23,35	10,98	5,890	3,412	2,067	1,283	0,806	0,504
9	289,6	57,24	21,46	10,27	5,565	3,238	1,969	1,224	0,769	0,482

Ueber den Gebrauch dieser Tabellen möchte kaum etwas zu erinnern sein. Ist z. B. der Querschnitt der verengten Eintrittsöffnung 0,69 von dem Querschnitt der Röhre, also $\frac{a}{a_1} = 0,69$, so gibt die letzte Tabelle den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1,969$, weil sich derselbe in der mit 6 überschriebenen Vertikal- und in der mit 9 anfangenden Horizontalreihe befindet.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass allerdings die in der vorletzten Tabelle aufgeführten Contractionscoefficienten eigentlich nicht wirkliche Contractionscoefficienten sind, sondern nur als Hilfswerthe zur Berechnung der letzten Tabelle angesehen werden müssen. In der That, der mittlere Werth dieser sogenannten Contractionscoefficienten (α) ist nicht grösser als 0,6075, während doch nach dem Frühern (s. Tab. No. XII.) der mittlere Ausflusscoefficient $\mu = 0,616$ und deshalb der um 4 Procent grössere Contractionscoefficient $\alpha = 0,641$ folgt. Die Abweichung des bei der Construction der obigen Tabelle gebrauchten fingirten Contractionscoefficienten von dem nach dem Frühern bestimmten hat aber seinen Grund darin, dass beim Durchgang durch die Verengung nicht bloss Contraction, sondern auch Geschwindigkeitsverminderung eintritt und deshalb der Widerstandscoefficient in aller Genauigkeit nicht $= \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$ gesetzt werden darf, wenigstens dann nicht, wenn α den wirklichen Contractionscoefficienten bezeichnet. Es ist vielmehr, ähnlich wie oben beim Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren,

$$\zeta = 0,0765. \left(\frac{a}{\alpha a_1}\right)^2 + \left(\frac{a}{\alpha a_1} - 1\right)^2$$

zu setzen, weil schon durch die verminderte Eintrittsgeschwindigkeit der Druckhöhenverlust $0,0765 \left(\frac{a}{\alpha a_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$ statt findet.

Wenn nun z. B. das Querschnittsverhältniss $\frac{a_1}{a} = \frac{1}{2}$ und der Contractionscoefficient $\alpha = 0,64$ ist, so folgt der entsprechende Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0,0765. \frac{4}{(0,64)^2} + \left(\frac{2}{0,64} - 1\right)^2 = 0,747 + 4,516 = 5,263,$$

welcher von dem oben gefundenen (5,257) nur wenig abweicht.

---

b) Verengungen im Innern der Röhren.

Um auch die Einwirkung der unvollkommenen Contraction bei Verengungen in Röhren kennen zu lernen, wurden die letzten, runde Mündungen in der dünnen Wand bildenden Mundstücke in das Innere des langen Messingrohres oder, bei angesetzter Eisenröhre, in die Verbindungsstelle beider Röhren eingesetzt und nun ein voller Ausfluss in freier Luft oder, wenn dies nicht gelingen wollte, ein solcher unter Wasser herbeigeführt. Die dadurch gewonnenen Resultate sind folgende.

Mündung No. 1. Ausfluss durch das einfache Messingrohr unter Wasser.

Inhalt $a = 0,58901$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0,046132$.

Druckhöhen: $h_1 = 0,5790$, $h_2 = 0,4352$, $h = 0.5045$ Meter.

Zeit $\tau = 514$ Sec., hiernach berechnete Coefficienten: $\mu_2 = 0,03060$, $\zeta_2 = 1067,2$; der blosse Röhrenwiderstand gibt $\zeta_1 = 0,46$, daher bleibt

$\zeta = 1066,74$ und $\mu = 0,03060$.

Mündung No. 3. Ausfluss durch das einfache Messingrohr unter Wasser.

Inhalt $a = 1{,}19597$ Quadratcentimeter, Verhältniss $\frac{a}{a_1} = 0{,}093669$.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5815$, $h_2 = 0{,}2020$, $h = 0{,}3673$ Meter.

Zeit $= 790$ Secunden, hiernach bestimmt $\mu_2 = 0{,}06158$, $\zeta_2 = 262{,}69$; hiervon wegen des Röhrenwiderstandes $\zeta_1 = 0{,}25$, bleibt

$\zeta = 262{,}44$ und $\mu = 0{,}06161$.

Die nämliche Mündung; Ausfluss durch die angesteckte Eisenröhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5790$, $h_2 = 0{,}2000$, $h = 0{,}3649$ Meter.

Zeit $\tau = 799$ Sec., hieraus berechnet $\mu_2 = 0{,}06070$, $\zeta_2 = 270{,}43$; beim freien Ausfluss war $\tau = 61{,}75$ Sec., deshalb berechnet sich der Röhrenwiderstand $\zeta_1 = 0{,}621$, und es bleibt nun für die Verengung allein

$\zeta = 269{,}81$ und $\mu = 0{,}6077$.

Ein anderer Versuch gab

$h_1 = 0{,}5855$, $h_2 = 0{,}2065$, $h = 0{,}3719$ Meter, $\tau = 790{,}5$ Sec., $\mu_2 = 0{,}6077$, $\zeta_2 = 269{,}75$.

Die Röhrenverbindung allein gab $\tau = 68{,}5$ Sec., deshalb folgt für sie $\zeta_1 = 1{,}033$, und es bleibt

$\zeta = 268{,}72$ und $\mu = 0{,}6089$.

Aus den letzten drei Versuchen folgt der Mittelwerth $\zeta = 267{,}54$.

Mündung No. 4. Ausfluss durch die angesetzte Eisenröhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5755$, $h_2 = 0{,}1965$, $h = 0{,}3611$ Meter.

Zeit $\tau = 517$ Sec., hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}09429$ und $\zeta_2 = 111{,}47$; aber die Rohrverbindung allein gibt $\zeta_1 = 0{,}63$, daher bleibt

$\zeta = 110{,}84$ und $\mu = 0{,}09456$.

Mündung No. 5. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7793$, $h_2 = 0{,}3935$, $h = 0{,}5713$ Meter.

Zeit $\tau = 299$ Secunden, hiernach $\mu_2 = 0{,}13193$, $\zeta_2 = 56{,}45$, abgezogen $\zeta_1 = 0{,}219$, bleibt

$\zeta = 56{,}23$ und $\mu = 0{,}13219$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch die angesetzte Eisenröhre in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7913$, $h_2 = 0{,}4077$, $h = 0{,}5838$ Meter.

Zeit $\tau = 298{,}25$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}13012$, $\zeta_2 = 58{,}06$; hiervon $\zeta = 0{,}55$, bleibt

$\zeta = 57{,}41$ und $\mu = 0{,}13084$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch die vorige Röhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5785$, $h_2 = 0{,}1950$, $h = 0{,}3613$ Meter.

Zeit $\tau = 378$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}13047$, $\zeta_2 = 57{,}75$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}61$, bleibt

$\zeta = 57{,}14$ und $\mu = 0{,}13115$.

Das Mittel aus den letzten drei Widerstandscoefficienten ist $\zeta = 56{,}93$.

Mündung No. 6. Ausfluss durch die eiserne Röhre in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7768$, $h_2 = 0{,}3945$, $h = 0{,}5696$ Meter.

Zeit $\tau = 229$ Sec.; hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}17098$, $\zeta_2 = 33{,}207$; aber $\zeta_1 = 0{,}920$; daher bleibt

$\zeta = 32{,}287$ und $\mu = 0{,}17333$.

Mündung No. 9. Durch das einfache Rohr unter Wasser ausfliessend.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5785$, $h_2 = 0{,}1995$, $h = 0{,}3646$ Meter.

Zeit $\tau = 166{,}75$ Sec., hieraus ermittelt: $\mu_2 = 0{,}29251$ und $\zeta_2 = 10{,}687$; aber $\zeta_1 = 0{,}654$, daher bleibt

$\zeta = 10{,}033$ und $\mu = 0{,}30106$.

Die nämliche Mündung. Ausfluss durch die Eisenröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7878$, $h_2 = 0{,}4088$, $h = 0{,}5829$ Meter.

Zeit $\tau = 123$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}31197$, $\zeta_2 = 9{,}028$; aber $\zeta_1 = 0{,}532$, daher bleibt
$\zeta = 8{,}496$ und $\mu = 0{,}32451$.

Zweiter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4088$, $h_2 = 0{,}1221$, $h = 0{,}2445$ Meter.

Zeit $\tau = 146$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}30714$, $\zeta_2 = 9{,}0600$; hievon $\zeta_1 = 0{,}559$, bleibt
$\zeta = 8{,}501$ und $\mu = 0{,}32442$.

Das Mittel aus den letzten drei Werthen für ζ ist $= 9{,}010$.

Mündung No. 10. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7761$, $h_2 = 0{,}3971$, $h = 0{,}5709$ Meter.

Zeit $\tau = 102{,}17$ Sec., hieraus ermittelt: $\mu_2 = 0{,}3814$, $\zeta_2 = 5{,}875$; hiervon abgezogen $\zeta_1 = 0{,}162$, bleibt

$\zeta = 5{,}713$ und $\mu = 0{,}3860$.

Zweiter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3971$, $h_2 = 0{,}1109$, $h = 0{,}2319$ Meter.

Zeit $\tau = 120{,}4$; hieraus gefunden: $\mu_2 = 0{,}3836$, $\zeta_2 = 5{,}795$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}172$, bleibt
$\zeta = 5{,}623$ und $\mu = 0{,}3886$.

Dritter Versuch. $h_1 = 0{,}7793$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5742$ Meter.

Zeit $\tau = 104{,}5$ Sec., hieraus berechnet $\mu_2 = 0{,}3718$, $\zeta_2 = 6{,}233$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}526$, bleibt

$\zeta = 5{,}707$ und $\mu = 0{,}3861$.

Die vorige Mündung. Ausfluss durch die angesetzte Eisenröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7761$, $h_2 = 0{,}3971$, $h = 0{,}5709$ Meter.

Zeit $\tau = 105{,}25$; daraus berechnet: $\mu_2 = 0{,}3684$, $\zeta_2 = 6{,}368$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}517$, daher bleibt

$\zeta = 5{,}851$ und $\mu = 0{,}3820$.

Zweiter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3971$, $h_2 = 0{,}1109$, $h = 0{,}2319$ Meter.

Zeit $\tau = 127$ Sec.; deshalb folgt $\mu_2 = 0{,}3619$, $\zeta_2 = 6{,}637$; hiervon ab $\zeta_1 = 0{,}525$, bleibt $\zeta = 6{,}112$ und $\mu = 0{,}3750$.

Das Mittel aus den letzten fünf Werthen von ζ ist nun $= 5{,}810$.

Mündung No. 11. Ausfluss durch das einfache Messingrohr in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3938$, $h = 0{,}5672$ Meter.

Zeit $\tau = 86$ Sec., hieraus gefunden: $\mu_2 = 0{,}4540$, $\zeta_2 = 3{,}852$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}543$, bleibt $\zeta = 3{,}309$ und $\mu = 0{,}4817$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0{,}3938$, $h_2 = 0{,}1073$, $h = 0{,}2276$ Meter.

Zeit $\tau = 103$ Sec., hieraus berechnet: $\mu_2 = 0{,}4505$, $\zeta_2 = 3{,}928$; ab $\zeta_1 = 0{,}581$, bleibt $\zeta = 3{,}347$ und $\mu = 0{,}4796$.

Dritter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7693$, $h_2 = 0{,}3906$, $h = 0{,}5641$ Meter.

Zeit $\tau = 85{,}34$, hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}4590$, $\zeta_2 = 3{,}747$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}219$, bleibt $\zeta = 3{,}528$ und $\mu = 0{,}4699$.

Vierter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3906$, $h_2 = 0{,}1038$, $h = 0{,}2243$ Meter.

Zeit $\tau = 101{,}66$, hieraus $\mu_2 = 0{,}4630$, $\zeta_2 = 3{,}665$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}256$, bleibt $\zeta = 3{,}409$, $\mu = 0{,}4763$.

Das vorige Mundstück. Ausfluss durch die Eisenröhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5755$, $h_2 = 0{,}1965$, $h = 0{,}3611$ Meter.

Zeit $\tau = 110{,}5$ Sec., daher $\mu_2 = 0{,}4412$, $\zeta_2 = 4{,}138$; subtrahirt $\zeta_1 = 0{,}631$, bleibt $\zeta = 3{,}507$ und $\mu = 0{,}4710$.

Mittlerer Werth von $\zeta = 3{,}420$.

Mündung No. 12. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7782$, $h_2 = 0{,}3942$, $h = 0{,}5700$ Meter.

Zeit $\tau = 72$ Sec., hieraus gefunden: $\mu_2 = 0{,}5488$, $\zeta_2 = 2{,}321$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}212$, deshalb bleibt

$\zeta = 2{,}109$ und $\mu = 0{,}5671$.

Zweiter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3942$, $h_2 = 0{,}1042$, $h = 0{,}2259$ Meter.

Zeit $\tau = 85$ Sec., folglich $\mu_2 = 0{,}5578$ und $\zeta_2 = 2{,}214$; hievon $\zeta_1 = 0{,}238$ subtrahirt, bleibt $\zeta = 1{,}976$ und $\mu = 0{,}5797$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch die eiserne Ansatzröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7913$, $h_2 = 0{,}4077$, $h = 0{,}5838$ Meter.

Zeit $\tau = 73$ Sec., folglich $\mu_2 = 0{,}5316$, $\zeta_2 = 2{,}538$; hiervon $\zeta_1 = 0{,}546$, bleibt $\zeta = 1{,}992$ und $\mu = 0{,}5781$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0{,}4077$, $h_2 = 0{,}1178$, $h = 0{,}2409$ Meter.

Zeit $\tau = 86{,}5$, folglich $\mu_2 = 0{,}5280$, $\zeta_2 = 2{,}587$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}599$, bleibt
$\zeta = 1{,}988$ und $\mu = 0{,}5785$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch die Eisenröhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5785$, $h_2 = 0{,}1950$, $h = 0{,}3613$ Meter.

Zeit $\tau = 94{,}25$ Sec., hieraus gefunden: $\mu_2 = 0{,}5232$, $\zeta_2 = 2{,}653$: aber $\zeta_1 = 0{,}606$, folglich bleibt
$\zeta = 2{,}047$ und $\mu = 0{,}5729$.

Mittlerer Werth von $\zeta = 2{,}022$.

Mündung No. 13. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7800$, $h_2 = 0{,}4005$, $h = 0{,}5637$ Meter.

Zeit $\tau = 64{,}5$ Sec., hiernach bestimmt: $\mu_2 = 0{,}6030$ und $\zeta_2 = 1{,}750$; aber $\zeta_1 = 0{,}570$, folglich bleibt
$\zeta = 1{,}180$ und $\mu = 0{,}6773$.

Die nämliche Mündung. Ausfluss durch die Eisenröhre in die freie Luft.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7878$, $h_2 = 0{,}4088$, $h = 0{,}5807$ Meter.

Zeit $\tau = 63\frac{1}{4}$ Sec., hieraus $\mu_2 = 0{,}6067$, $\zeta_2 = 1{,}717$; aber $\zeta_1 = 0{,}532$, daher
$\zeta = 1{,}185$ und $\mu = 0{,}6765$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch das einfache Rohr unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5790$, $h_2 = 0{,}2000$, $h = 0{,}3649$ Meter.

Zeit $\tau = 79{,}67$ Sec., deshalb $\mu_2 = 0{,}6118$, $\zeta_2 = 1{,}672$; aber $\zeta_1 = 0{,}465$, daher
$\zeta = 1{,}207$ und $\mu = 0{,}6731$.

Der mittlere Werth von $\zeta = 1{,}191$.

Mündung No. 14. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7761$, $h_2 = 0{,}3971$, $h = 0{,}5709$ Meter.

Zeit $\tau = 54{,}4$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}7163$, $\zeta_2 = 0{,}949$; aber $\zeta_1 = 0{,}162$, daher
$\zeta = 0{,}787$ und $\mu = 0{,}7481$.

Zweiter Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}3971$, $h_2 = 0{,}1109$, $h = 0{,}2319$ Meter.

Zeit $\tau = 63{,}85$ Sec., daher $\mu_2 = 0{,}7234$, $\zeta_2 = 0{,}911$; aber $\zeta_1 = 0{,}172$, daher
$\zeta = 0{,}739$ und $\mu = 0{,}7583$.

Dritter Versuch. $h_1 = 0{,}7793$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5732$ Meter.

Zeit $\tau = 59$ Sec., daher $\mu_2 = 0{,}6586$, $\zeta_2 = 1{,}306$; aber $\zeta_1 = 0{,}526$, daher
$\zeta = 0{,}780$ und $\mu = 0{,}7495$.

Vierter Versuch. $h_1 = 0{,}3971$, $h_2 = 0{,}1109$, $h = 0{,}2319$ Meter.

Zeit $\tau = 69{,}75$, daher $\mu_2 = 0{,}6582$, $\zeta_2 = 1{,}308$; aber $\zeta_1 = 0{,}542$, deshalb
$\zeta = 0{,}766$ und $\mu = 0{,}7525$.

Die vorige Mündung. Ausfluss durch die Eisenröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7881$, $h_2 = 0{,}4091$, $h = 0{,}5832$ Meter.
Zeit $\tau = 58\frac{1}{2}$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0{,}6557$, $\zeta_2 = 1{,}326$; aber $\zeta_1 = 0{,}549$, folglich $\zeta = 0{,}777$ und $\mu = 0{,}7502$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0{,}4091$, $h_2 = 0{,}1229$, $h = 0{,}2451$ Meter.
Zeit $\tau = 68\frac{1}{2}$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}6526$, $\zeta_2 = 1{,}348$; aber $\zeta_1 = 0{,}612$, bleibt $\zeta = 0{,}736$ und $\mu = 0{,}7590$.
Das Mittel aus den letzten Werthen von ζ ist $= 0{,}764$.

Mündung No. 15. Ausfluss durch das einfache Rohr in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7723$, $h_2 = 0{,}3938$, $h = 0{,}5673$ Meter.
Zeit $\tau = 53{,}3$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}7325$, $\zeta_2 = 0{,}864$; aber $\zeta_1 = 0{,}543$, daher bleibt $\zeta = 0{,}321$ und $\mu = 0{,}8701$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0{,}3938$, $h_2 = 0{,}1073$, $h = 0{,}2281$ Meter.
Zeit $\tau = 63{,}2$ Sec., hieraus folgt $\mu_2 = 0{,}7360$, $\zeta_2 = 0{,}846$; aber $\zeta_1 = 0{,}581$, daher $\zeta = 0{,}265$ und $\mu = 0{,}8891$.

Dritter Versuch. $h_1 = 0{,}7693$, $h_2 = 0{,}3906$, $h = 0{,}5641$ Meter.
Zeit $\tau = 48{,}75$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}8036$, $\zeta_2 = 0{,}548$; aber $\zeta_1 = 0{,}219$, daher bleibt $\zeta = 0{,}329$, $\mu = 0{,}8674$.

Vierter Versuch. $h_1 = 0{,}3906$, $h_2 = 0{,}1038$, $h = 0{,}2243$ Meter.
Zeit $\tau = 58{,}75$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}8011$, $\zeta_2 = 0{,}558$; aber $\zeta_1 = 0{,}256$, daher $\zeta = 0{,}302$ und $\mu = 0{,}8763$.

Dieselbe Mündung. Ausfluss durch die Eisenröhre unter Wasser.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}5755$, $h_2 = 0{,}1965$, $h = 0{,}3611$ Meter.
Zeit $\tau = 67{,}75$ Sec., hiernach $\mu_2 = 0{,}7196$, $\zeta_2 = 0{,}931$; aber $\zeta_1 = 0{,}630$, daher bleibt $\zeta = 0{,}301$ und $\mu = 0{,}8767$.
Das Mittel von den zuletzt gefundenen Werthen von ζ ist $= 0{,}304$.

Mündung No. 16. Ausfluss durch die Eisenröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7913$, $h_2 = 0{,}4077$, $h = 0{,}5838$ Meter.
Zeit $\tau = 51{,}75$ Sec., hieraus $\mu_2 = 0{,}7500$, $\zeta_2 = 0{,}778$; abgezogen $\zeta_1 = 0{,}546$, bleibt $\zeta = 0{,}232$ und $\mu = 0{,}9010$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0{,}4077$, $h_2 = 0{,}1178$, $h = 0{,}2409$ Meter.
Zeit $\tau = 60{,}75$ Sec.; hiernach $\mu_2 = 0{,}7518$, $\zeta_2 = 0{,}769$; aber $\zeta_1 = 0{,}599$, bleibt $\zeta = 0{,}170$ und $\mu = 0{,}9245$.
Das Mittel von ζ ist $= 0{,}201$.

Mündung No. 17. Ausfluss durch die Eisenröhre in die freie Luft.

Erster Versuch. $h_1 = 0,7768$, $h_2 = 0,3945$, $h = 0,5696$ Meter.

Zeit $\tau = 55,67$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0,7033$, $\zeta_2 = 1,022$; aber $\zeta_1 = 0,920$, daher bleibt

$\zeta = 0,102$ und $\mu = 0,9526$.

Zweiter Versuch. $h_1 = 0,3945$, $h_2 = 0,1045$, $h = 0,2262$ Meter.

Zeit $\tau = 67,58$ Sec., hieraus bestimmt: $\mu_2 = 0,6977$, $\zeta_2 = 1,055$; aber $\zeta_1 = 0,915$, folglich bleibt

$\zeta = 0,140$ und $\mu = 0,9366$.

Der mittlere Werth von ζ ist $= 0,121$.

Die Resultate dieser Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XXIX.

Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,0461	0,0937	0,1406	0,1867	0,2380	0,3814	0,4373	0,5095
Widerstandscoefficient ζ.	1067	267,5	110,8	56,93	32,29	9,010	5,810	3,420
Contractionscoefficient α.	0,6439	0,6151	0,6169	0,6269	0,6288	0,6552	0,6706	0,6888
Querschnittsverhältniss $\frac{a}{a_1}$.	0,5816	0,6511	0,7123	0,7954	0,8302	0,8598	1,0000	
Widerstandscoefficient ζ.	2,022	1,191	0,764	0,304	0,201	0,121	0,000	
Contractionscoefficient α.	0,7099	0,7344	0,8103	0,8316	0,8598	0,8629	1,000	

Der Inhalt in den beiden ersten Horizontalcolumnen dieser Tabelle ist aus dem Vorhergehenden bekannt, was aber die letzte Columne betrifft, so enthält dieselbe eine unter dem Namen Contractionscoefficienten eingeführte und durch die Formel

$$\alpha = \frac{1}{\frac{a}{a_1}\left(1 + \sqrt{\zeta}\right)}$$

berechnete Hilfsgrösse, deren Gebrauch aus Folgendem erhellen wird.

Vergleichen wir die hier gefundenen Werthe (α) der Contractionscoefficienten mit den oben für den verengten Eintritt gefundenen Coefficienten, so stellt sich auch hier wieder eine mit dem Querschnittsverhältnisse $\frac{a}{a_1}$ wachsende Abweichung beider von einander heraus, deren Entstehung in der unvollkommenen Contraction beim Durchgang durch die Verengung innerhalb des Rohres ihren Grund hat, und es lässt sich daher erwarten, dass sich die Abhängigkeit dieser Abweichungen oder Differenzen durch ähnliche Formeln aus dem bekannten Querschnittsverhältnisse ausdrücken lässt, wie jene

Abweichungen der Contractionscoefficienten bei vollkommener Contraction von denen bei unvollkommener Contraction, wenn ein freier Ausfluss statt hat.

Bezeichnen wir die weiter oben gefundenen Werthe der Contractionscoefficienten bei vollkommener Contraction oder für den verengten Eintritt mit α_0 und den entsprechenden Contractionscoefficienten bei unvollkommener Contraction oder für den Durchgang durch die Verengung vom relativen Inhalt $\frac{a}{a_1}$ mit $\alpha_{\frac{a}{a_1}}$, so ist die Differenz beider Coefficienten $\alpha_{\frac{a}{a_1}} - \alpha$ und ihr Verhältniss zum Coefficienten bei vollkommener Contraction:

$$y = \frac{\alpha_{\frac{a}{a_1}} - \alpha}{\alpha}.$$

Um nun die Abhängigkeit zwischen $\frac{a}{a_1} = x$ und y durch eine Formel ausdrücken zu können, sind die Werthe von y aus den in obigen Tabellen aufgezeichneten Werthen von α und $\alpha_{\frac{a}{a_1}}$ berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt worden.

Tabelle XXX.

Abscisse $x = \frac{a}{a_1}$.	0,0461	0,0937	0,1406	0,1867	0,2380	0,3814	0,4373	0,5095
Ordinate $y = \frac{\alpha_{\frac{a}{a_1}} - \alpha}{\alpha}$.	0,00877	0,00049	0,02253	0,02939	0,03019	0,07287	0,09755	0,12770
Abscisse $x = \frac{a}{a_1}$.	0,5816	0,6511	0,7123	0,7954	0,8302	0,8598	1,0000	
Ordinate $y = \frac{\alpha_{\frac{a}{a_1}} - \alpha}{\alpha}$.	0,16358	0,20908	0,23900	0,34780	0,39133	0,45957	0,6778	

Vergleicht man die Werthe für y aus dieser Tabelle mit den Werthen aus Tabelle No. IX., so stellt sich zwar keine vollständige Uebereinstimmung heraus, allein es sind doch auch die Abweichungen nicht bedeutend; es sind nämlich die Werthe dieser Tabelle anfangs wenig kleiner und später um etwas grösser als die gleichnamigen Werthe in Tabelle No. IX. Wenn wir nun auch nicht die Werthe beider Tabellen als gleich ansehen wollen, so lässt sich doch erwarten, dass beiden ein und dasselbe Gesetz entspreche, dass also diese Abweichungen nur in kleinen Differenzen der Constanten begründet seien.

Setzen wir deshalb auch hier

$$y = A\,(a^x - 1),$$

und bestimmen wir nach den aus dem Obigen bekannten Regeln die Constanten A und a. Einiges

Probiren führt sehr bald auf den Näherungswerth $a = 21$, und da nun noch der vorletzten Tabelle zufolge $x = 1$, $y = \frac{1 - 0,5960}{0,5960} = 0,6778$ gibt, so folgt der entsprechende Werth der anderen Constante

$$A = \frac{0,6778}{21 - 1} = 0,03389.$$

Die so erhaltene Formel

$$y = 0,03389\ (21^x - 1), \text{ oder}$$
$$\Sigma\,(y) = 0,03389\ (\Sigma\,(21^x) - N)$$

gibt für $x = 0,0461$, $0,0937$, $0,1406$, $0,1867$, $0,2380$, $0,3814$, $0,4373$, $0,5095$, $0,5816$, $0,6511$, $0,7123$, $0,7954$, $0,8302$, $0,8598$

folgende Werthe für 21^x:

1,1507, 1,3301, 1,5343, 1,7655, 2,0743, 3,1937, 3,7862, 4,7171, 5,8750, 7,2594, 8,7461, 11,2645, 12,5229, 13,7039,

deren Summe $\Sigma\,(21^x) = 78,9237$ ist und

$$\Sigma\,(y) = 0,03389\ (78,9237 - 14) = 2,20025$$

gibt.

Nun ist aber die Summe von den oben aufgeführten Werthen von y:

$$\Sigma\,(y) = 2,19985,$$

daher ist die Differenz beider Summen nur $2,20025 - 2,19985 = 0,0004$. Die Kleinheit dieser berechtigt uns vollkommen

$$y = 0,03389\ (21^x - 1)$$

zu setzen und hiernach folgende Tabelle zu berechnen.

Tabelle XXXI.

Die wegen der Unvollkommenheit der Contraction nöthigen Correctionen der Contractionscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Verengungen in Röhren.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,000	0,012	0,029	0,051	0,081	0,121	0,177	0,252	0,353	0,491
1	0,001	0,013	0,030	0,053	0,084	0,126	0,183	0,260	0,365	0,507
2	0,002	0,015	0,032	0,056	0,088	0,131	0,190	0,270	0,378	0,524
3	0,003	0,016	0,034	0,059	0,092	0,136	0,197	0,279	0,390	0,541
4	0,004	0,018	0,036	0,062	0,095	0,142	0,204	0,289	0,403	0,559
5	0,006	0,020	0,039	0,064	0,099	0,147	0,211	0,299	0,417	0,577
6	0,007	0,021	0,041	0,068	0,104	0,153	0,219	0,309	0,431	0,596
7	0,008	0,023	0,043	0,071	0,108	0,158	0,227	0,319	0,445	0,616
8	0,009	0,025	0,046	0,074	0,112	0,164	0,235	0,330	0,460	0,636
9	0,011	0,027	0,048	0,077	0,117	0,170	0,243	0,342	0,475	0,656

Mittels der Werthe dieser Tabelle lassen sich nun auch aus den in Tab. XXVII. aufgeführten Werthen der Contractionscoefficienten bei vollkommener Contraction die Contractionscoefficienten für

die bei dem Durchgang durch verengerte Röhren eintretende unvollkommene Contraction berechnen. Die Resultate dieser Berechnung enthält folgende Tabelle.

Tabelle XXXII.

Die Contractionscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Verengungen in cylindrischen Röhren.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,6187	0,6238	0,6320	0,6431	0,6591	0,6809	0,7122	0,7548	0,8126	0,8922
1	0,6191	0,6242	0,6324	0,6441	0,6606	0,6843	0,7156	0,7594	0,8195	0,9013
2	0,6195	0,6252	0,6334	0,6457	0,6628	0,6865	0,7195	0,7650	0,8271	0,9112
3	0,6199	0,6256	0,6344	0,6473	0,6650	0,6892	0,7234	0,7702	0,8340	0,9211
4	0,6203	0,6266	0,6354	0,6489	0,6666	0,6926	0,7275	0,7760	0,8415	0,9315
5	0,6213	0,6276	0,6370	0,6499	0,6688	0,6954	0,7314	0,7817	0,8495	0,9418
6	0,6216	0,6280	0,6379	0,6521	0,6716	0,6987	0,7360	0,7874	0,8576	0,9522
7	0,6220	0,6290	0,6389	0,6537	0,6738	0,7015	0,7406	0,7931	0,8656	0,9644
8	0,6224	0,6300	0,6406	0,6553	0,6760	0,7049	0,7451	0,7995	0,8742	0,9760
9	0,6235	0,6310	0,6416	0,6569	0,6787	0,7083	0,7497	0,8064	0,8829	0,9875

Aus den in dieser Tabelle aufgeführten Contractionscoefficienten ergeben sich nun mittels der Formel

$$\zeta = \left(\frac{a_1}{\alpha a} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha x} - 1\right)^2$$

die entsprechenden Widerstandscoefficienten, welche man in folgender Tabelle zusammengestellt hat.

Tabelle XXXIII.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Verengungen in cylindrischen Röhren.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	∞	225,9	47,77	17,50	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060
1	25768	184,0	42,64	16,07	7,247	3,480	1,666	0,730	0,257	0,048
2	6354	152,0	38,14	14,74	6,720	3,245	1,542	0,665	0,226	0,037
3	2785	127,6	34,26	13,55	6,236	3,019	1,428	0,606	0,198	0,028
4	1545	108,1	30,88	12,48	5,806	2,802	1,317	0,550	0,172	0,020
5	973	92,6	27,87	11,54	5,395	2,607	1,218	0,498	0,148	0,014
6	666	80,1	25,30	10,63	5,004	2,420	1,121	0,450	0,127	0,009
7	483	69,8	23,01	9,82	4,656	2,253	1,031	0,406	0,108	0,005
8	364	61,1	20,93	9,10	4,334	2,091	0,948	0,364	0,090	0,002
9	283	53,9	19,14	8,43	4,028	1,940	0,871	0,325	0,074	0,001

Vergleicht man die durch Beobachtungen erhaltenen Widerstandscoefficienten mit denen in der letzten Tabelle, so stellt sich eine recht leidliche Uebereinstimmung heraus. Z. B. für $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}51$

gab die Beobachtung $\zeta = 3{,}42$, der Tabelle zufolge ist aber $\zeta = 3{,}48$; ferner für $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}80$ ist nach den Beobachtungen $\zeta = 0{,}30$, nach der Tabelle aber $\zeta = 0{,}29$ u. s. w.

Wie sehr die Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch Verengungen in Röhren oder bei unvollkommener Contraction abweichen von denen für den verengten Eintritt in Röhren oder bei vollkommener Contraction, wird durch eine Vergleichung der Tabellen No. XXXIII. und No. XXVIII. vor Augen geführt. So ist z. B. für $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}5$ in dem ersten Falle $\zeta = 3{,}753$, im zweiten aber $\zeta = 5{,}256$; für $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}75$ im ersten Falle $\zeta = 0{,}498$, im zweiten $\zeta = 1{,}477$ u. s. w.

---

2) Rectanguläre Verengungen im parallelepipedischen Rohre.

a) Verengungen beim Eintritt in das Rohr.

Ueber den Widerstand, den das Wasser beim Durchgang durch rectanguläre Verengungen im dünnen Blech erleidet, sind nur wenige Versuche angestellt worden, weshalb die Ergebnisse nicht dazu angewendet werden können, um ein besonderes Gesetz daraus abzuleiten, sondern nur dazu dienen sollen, um eine Prüfung an dem für den Durchgang durch kreisförmige Verengungen aufgefundenen Gesetze anzustellen. Die in Anwendung gekommenen Verengungen wurden durch folgende, schon bei den Versuchen über den Ausfluss in die freie Luft gebrauchte Mundstücke erzeugt.

Mundstück No. 1. Weite der Mündung = 2,020 Centimeter, Höhe derselben = 0,976 Centimeter, Inhalt $a = 1{,}91715$ Quadratcentimeter.

Mundstück No. 3. Weite der Müuduug = 2,444, Höhe = 1,177 Centimeter, Inhalt $a = 2{,}8766$ Quadratcentimeter.

Versuch mit No. 1.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7918$, $h_2 = 0{,}4094$, $h = 0{,}5850$ Meter.
Inhalt der Ausmündung $a = 12{,}49$ Quadratcentimeter.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = 0{,}1586$.

Ausflusszeit $\tau = 363{,}25$ Sec. Hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}1093$ und $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 83{,}70$.

Die Röhrenverbindung allein gab $\tau = 56{,}75$ Sec., daher ist für sie $\mu_1 = 0{,}6997$ und $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 2{,}043$. Die kurze parallelepipedische Ansatzröhre gab aber den mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta_1 = 0{,}518$, daher bleibt nach Abzug des Widerstandes beim Eintritt für die Röhrenverbindung $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 2{,}043 - 0{,}518 = 1{,}524$ und sonach für den Widerstand des verengten Eintrittes:

$$\zeta = 83{,}70 - 1{,}52 = 82{,}18.$$

Versuch mit No. 3.

Querschnittsverhältniss: $\frac{a}{a_1} = 0{,}2313$.

Ausflusszeit $\tau = 237$ Sec., die übrigen Verhältnisse blieben die obigen.

Hiernach berechnet: $\mu_2 = 0{,}1675$, $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 35{,}63$, und hiervon wegen des Röhrenwiderstandes $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 1{,}524$ subtrahirt, bleibt für den Widerstand des verengten Eintrittes:

$$\zeta = 35{,}63 - 1{,}52 = 34{,}11.$$

Beide Resultate stimmen recht leidlich mit den für kreisrunde Verengungen gefundenen Werthen zusammen. So gibt Tab. XXVIII. für $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}16$, $\zeta = 83{,}92$, während wir oben für $x = 0{,}1586$, $\zeta = 82{,}18$ gefunden haben, und ebenso gibt diese Tabelle für $x = 0{,}23$, $\zeta = 37{,}05$, während sich für $x = 0{,}2313$, $\zeta = 34{,}11$ herausgestellt hat.

---

b) Verengungen im Innern des Rohres.

Versuch mit der Mündung No. 1.

Mit dem beim obigen Versuch über den Widerstand beim Eintritt gebrauchten Mundstücke wurde unter gleichen Umständen die Ausflusszeit $\tau = 365{,}5$ Sec. beobachtet, wenn sich dasselbe im Innern der parallelepipedischen Röhre befand. Deshalb folgt: $\mu_2 = 0{,}1086$ und $\frac{1}{\mu_2{}^2} = 84{,}74$. Nun ist aber der vereinigte Eintritts- und Röhrenwiderstand $\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1{}^2} - 1 = 1{,}043$, daher bleibt für den Widerstand beim Durchgang durch die Verengung vom Querschnitte $x = \frac{a}{a_1} = 0{,}1586$ der Widerstandscoefficient

$$\zeta = \frac{1}{\mu_2{}^2} - \frac{1}{\mu_1{}^2} = 84{,}74 - 2{,}04 = 82{,}70,$$

wogegen die letzte Tabelle für $x = 0{,}16$, $\zeta = 80{,}1$ gibt.

Versuch mit der Mündung No. 3.

Diese Mündung im Innern der Röhrenverbindung gab unter übrigens gleichen Umständen $\tau = 226$ Sec., weshalb sich zunächst herausstellt:

$$\mu_2 = 0{,}1757 \text{ und } \frac{1}{\mu_2{}^2} = 32{,}40;$$

aber für die Röhrenverbindung allein ist $\frac{1}{\mu_1{}^2} = 2{,}043$, daher bleibt für den verengten Durchgang der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = 32{,}40 - 2{,}04 = 30{,}36.$$

Die letzte Tabelle No. XXXIII. gibt aber für $x = 0{,}24$, $\zeta = 30{,}88$; also wieder eine gute Uebereinstimmung.

Die geringen Abweichungen dieser für den Durchgang durch rectanguläre Verengungen gefundenen Widerstandscoefficienten von den oben gefundenen und in den Tabellen No. XXVIII. und No. XXXIII. zusammengestellten Widerstandscoefficienten für kreisrunde Verengungen möchten es gestatten, in Fällen der Anwendung jene Tabellen auch zur Bestimmung der Widerstandscoefficienten für vierseitige Verengungen zu gebrauchen.

II. Nebenversuche.

A. Versuche über den Ausfluss des Wassers bei partieller Contraction.

1) Rectanguläre Mündungen im dünnen Blech.

Zu diesen Versuchen kam folgende in Messingblech ausgeschnittene rectanguläre Mündung in Anwendung. Weite dieser Mündung: 5,052 Centimeter, Höhe derselben: 2,505 Centimeter, Inhalt $a = 5{,}052 . 2{,}505 = 12{,}655$ Quadratcentimeter. Uneingefasst, also bei vollständiger Contraction, gab diese Mündung folgende Resultate.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7855$, $h_2 = 0{,}4032$, $h_3 = 0{,}5786$ Meter.
Zeit $\tau = 64$ Sec., hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6155$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6389$, $h_2 = 0{,}2405$, $h = 0{,}4158$ Meter.
Zeit $\tau = 77{,}5$ Sec., hieraus bestimmter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6249$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4032$, $h_2 = 0{,}1135$, $h = 0{,}2361$ Meter.
Zeit $\tau = 74{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6254$.
Mittlerer Werth der vorstehenden Ausflusscoefficienten $\mu = 0{,}6219$.

Der Umfang dieser Mündung wurde nun zum Theil durch 12 Centimeter breite, auf der innern Wandfläche rechtwinkelig aufsitzende, übrigens vollkommen glatte Kupferbleche (wie *CD*, *EF* u. s. w. in den Figuren No. 9, 10 u. s. w. auf Taf. I.) so eingefasst, dass das Wasser an der Seite dieser Einfassung ohne Contraction ausfliessen musste. Die Resultate der Versuche über den Ausfluss durch die so eingefasste Mündung waren folgende.

1) Eine schmale Seite *CC*, also ein Sechstel des Umfanges (s. Fig. 9. Taf. I.) eingefasst.

Bei diesem Versuche floss das Wasser zwar noch hell, aber schief aus, es wurde nämlich der Strahl *AB* auf der eingefassten Seite *CD*, wie Fig. 9 vorstellt, 7 bis 9 Grad von der Normale der Mündungsebene zur Seite gedrückt.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7825$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5755$ Meter.
Zeit $\tau = 63{,}25$ Sec., hiernach berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6243$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6358$, $h_2 = 0{,}2375$, $h = 0{,}4126$ Meter.
Zeit $\tau = 77$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6313$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4003$, $h_2 = 0{,}1105$, $h = 0{,}2329$ Meter.
Zeit $\tau = 73{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6385$.
Der mittlere Werth dieser drei Ausflusscoefficienten ist $= 0{,}6314$.

Bezeichnen wir mit *Bidone* den ganzen Umfang der Mündung mit p und den eingefassten Theil desselben mit n, also das Verhältniss des letzteren zum ganzen Umfang mit $\frac{n}{p}$, so haben wir für die letzten Versuche $\frac{n}{p} = \frac{1}{6}$ und den entsprechenden Ausflusscoefficienten

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu_{\frac{1}{6}} = 0{,}6314$$

zu setzen.

Unter übrigens gleichen Umständen ist dieser Coefficient bei vollständiger Contraction $\mu = 0{,}6219$ gefunden worden, daher ist die Abweichung wegen der Einfassung

$$\mu_{\frac{1}{6}} - \mu = 0{,}6314 - 0{,}6219 = 0{,}0095,$$

und ihr Verhältniss zum Coefficienten bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_{\frac{1}{6}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}0095}{0{,}6219} = 0{,}0153.$$

2) Eine untere lange Seite *EE*, also zwei Sechstel des Umfanges (s. Fig. 10. Taf. I.) eingefasst.

Der herausfliessende Strahl *AB* hatte die in Fig. 10 abgebildete Form. Die Resultate blieben unverändert, wenn ein über den ganzen Kasten weggehendes Bret so unter das Blech geschoben wurde, dass dieses unmittelbar auf jenem auflag.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7843$, $h_2 = 0{,}4021$, $h = 0{,}5774$ Meter.
Zeit $\tau = 61{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6410$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6380$, $h_2 = 0{,}2393$, $h = 0{,}4147$ Meter.
Zeit $\tau = 74{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6515$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4021$, $h_2 = 0{,}1123$, $h = 0{,}2348$ Meter.
Zeit $\tau = 71{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6535$.

Mittlerer Werth der drei letzten Ausflusscoefficienten oder $\mu_{\frac{1}{4}} = 0{,}6487$, aber μ ist $= 0{,}6219$, daher folgt $\mu_{\frac{1}{4}} - \mu = 0{,}0268$ und das Verhältniss

$$\frac{\mu_{\frac{1}{4}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}0268}{0{,}6219} = 0{,}0431.$$

3) Die beiden schmalen Seiten (CC und C_1C_1), also wieder $\frac{2}{8}$ oder $\frac{1}{4}$ des ganzen Umfanges eingefasst. (S. Fig. 11.)

Der sonst hoch und dünn ausfallende Strahl AB war hier fast ein halbes Meter breit, aber lange nicht so hell als beim Ausflusse durch die uneingefasste Mündung.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7833$, $h_2 = 0{,}4011$, $h = 0{,}5764$ Meter.
Zeit $\tau = 61{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6390$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6366$, $h_2 = 0{,}2383$, $h = 0{,}4136$ Meter.
Zeit $\tau = 75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6475$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4011$, $h_2 = 0{,}1113$, $h = 0{,}2337$ Meter.
Zeit $\tau = 72$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6528$.
Mittlerer Werth der drei letzten Ausflusscoefficienten: $\mu_{\frac{1}{4}} = 0{,}6464$; daher

$$\frac{\mu_{\frac{1}{4}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}6464 - 0{,}6219}{0{,}6219} = \frac{0{,}0245}{0{,}6219} = 0{,}0394.$$

Das Mittel aus beiden Werthen für $\mu_{\frac{1}{4}}$, einmal bei einseitiger, das zweite Mal bei symmetrischer Einfassung ist endlich

$$\mu_{\frac{1}{4}} = \frac{0{,}0431 + 0{,}0394}{2} = 0{,}0412.$$

4) Eine lange und eine kurze Seite zugleich (CC und EE), also die Hälfte des Umfanges eingefasst. (S. Fig. 12.)

Der Strahl war hier in horizontaler und vertikaler Richtung zugleich von der Axenrichtung abweichend, wie auch Fig. 12 vor Augen führt.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7825$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5755$ Meter.
Zeit $\tau = 60{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6527$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6362$, $h_2 = 0{,}2375$, $h = 0{,}4127$ Meter.
Zeit $\tau = 74$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6574$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4003$, $h_2 = 0{,}1105$, $h = 0{,}2329$ Meter.
Zeit $\tau = 71{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6586$.

Der mittlere Werth aus den drei letzten Ausflusscoefficienten: $\mu_{\frac{1}{2}} = 0{,}6562$.
Hieraus bestimmt sich

$$\frac{\mu_{\frac{1}{2}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}6562 - 0{,}6219}{0{,}6219} = \frac{0{,}0343}{0{,}6219} = 0{,}0551.$$

5) Die Mündung an beiden langen Seiten EE und E_1E_1, also $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ des Umfanges eingefasst.

Der hierbei ausfliessende Strahl war wenig hell und hatte stark abgerundete Kanten. S. Fig. 13.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7825$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5755$ Meter.
Zeit $\tau = 58{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6750$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6362$, $h_2 = 0{,}2375$, $h = 0{,}4127$ Meter.
Zeit $\tau = 71{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6804$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4003$, $h_2 = 0{,}1105$, $h = 0{,}2329$ Meter.
Zeit $\tau = 69$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6825$.
Mittlerer Werth der Ausflusscoefficienten für Zweidrittel Einfassung: $\mu_{\frac{2}{3}} = 0{,}6793$.
Der relative Werth der Abweichung folgt nun:

$$\frac{\mu_{\frac{2}{3}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}6793 - 0{,}6219}{0{,}6219} = \frac{0{,}0574}{0{,}6219} = 0{,}0923.$$

6) Die Mündung auf zwei kurzen und einer langen Seite (CC, C_1C_1 und EE), also wieder $\frac{2}{3}$ des Umfanges, jedoch unsymmetrisch, eingefasst. (S. Fig. 14.)

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7835$, $h_2 = 0{,}4013$, $h = 0{,}5766$ Meter.
Zeit $\tau = 58{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6715$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6368$, $h_2 = 0{,}2385$, $h = 0{,}4137$ Meter.
Zeit $\tau = 71{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6766$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4013$, $h_2 = 0{,}1115$, $h = 0{,}2340$ Meter.
Zeit $\tau = 69$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6809$.
Mittlerer Werth der Ausflusscoefficienten für diese Einfassung: $\mu_{\frac{2}{3}} = 0{,}6763$, und die entsprechende relative Abweichung von dem Coefficienten bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_{\frac{2}{3}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}6763 - 0{,}6219}{0{,}6219} = \frac{0{,}0544}{0{,}6219} = 0{,}0875.$$

Im vorigen Falle (No. 5) bei einer symmetrischen Einfassung wurde $\frac{\mu_{\frac{2}{3}} -}{\mu} = 0{,}0923$ gefunden, es ist daher das Mittel

$$\frac{\mu_{\frac{2}{3}} - \mu}{\mu} = 0{,}0899.$$

7) **Die Mündung ist auf den beiden langen und einer kurzen Seite** (*EE*, E_1E_1 **und** *CC*), **also auf** $\frac{5}{6}$ **des Umfanges eingefasst.**

Der sich hier bildende Strahl ist in Fig. 15 abgebildet.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7833$, $h_2 = 0{,}4011$, $h = 0{,}5764$ Meter.
Zeit $\tau = 56{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6984$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6366$, $h_2 = 0{,}2383$, $h = 0{,}4136$ Meter.
Zeit $\tau = 68{,}75$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}7063$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4011$, $h_2 = 0{,}1113$, $h = 0{,}2337$ Meter.
Zeit $\tau = 66{,}25$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}7095$.

Mittlerer Werth der letzten drei Ausflusscoefficienten für $\frac{5}{6}$ Einfassung: $\mu_{\frac{5}{6}} = 0{,}7047$, und die entsprechende relative Abweichung:

$$\frac{\mu_{\frac{5}{6}} - \mu}{\mu} = \frac{0{,}7047 - 0{,}6219}{0{,}6219} = \frac{0{,}0828}{0{,}6219} = 0{,}1331.$$

8) **Die rectanguläre Mündung ist auf allen vier Seiten** (*CC*, C_1C_1, *EE*, E_1E_1) **ihres Umfanges eingefasst.** (S. Fig. 16.)

Hierbei stellten sich ganz abweichende Ergebnisse heraus, auch hatte der Strahl seine regelmässige Form verloren, es floss vielmehr das Wasser ganz stossweise und in zerrissenen Fäden divergirend aus, wie Fig. 16 ungefähr vor Augen führt.

Grösserer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7825$, $h_2 = 0{,}4003$, $h = 0{,}5755$ Meter.
Zeit $\tau = 61{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6421$.

Mittlerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6358$, $h_2 = 0{,}2375$, $h = 0{,}4126$ Meter.
Zeit $\tau = 73{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6614$.

Kleinerer Druck.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4003$, $h_2 = 0{,}1105$, $h = 0{,}2329$ Meter
Zeit $\tau = 68{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}6875$.

Mittel aus den letzten drei Ausflusscoefficienten: $\mu = 0{,}6637$. Die Abweichung dieses Mittels von dem Coefficienten 0,6219 bei vollständiger Contraction ist nun $= 0{,}0418$, und ihr relativer Werth:

$$\frac{\mu_1 - \mu}{\mu} = \frac{0{,}0418}{0{,}6219} = 0{,}0672,$$

also wieder kleiner als bei $\frac{4}{6}$ und $\frac{5}{6}$ Einfassung.

Schliessen wir den letzten Fall der vollständigen Einfassung aus, oder nehmen wir an, dass von der Mündung nicht über $\frac{5}{6}$ des Umfanges eingefasst sei, so können wir die Abhängigkeit der Vergrösserung der Ausflusscoefficienten wegen der partiellen Contraction von der relativen Grösse der Einfassung $\frac{n}{p}$ annähernd durch eine einfache Formel ausdrücken, indem wir

$$\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu} = A.\frac{n}{p} + B\left(\frac{n}{p}\right)^2 \text{ oder}$$

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + A.\frac{n}{p} + B\left(\frac{n}{p}\right)^2\right)$$

setzen, und die Coefficienten aus den Resultaten der Beobachtungen ableiten.

Nehmen wir zunächst mit *Bidone* $B = 0$ an, setzen wir also

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + A\left(\frac{n}{p}\right)\right) \text{ oder}$$

$$\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu} = A\left(\frac{n}{p}\right),$$

und bestimmen wir aus den obigen Ergebnissen die Erfahrungszahl A mit Hilfe der Theorie des arithmetischen Mittels.

Es ergeben sich hiernach folgende sieben Gleichungen:

$0{,}0153 = \frac{1}{6}\,A,$ $\qquad$ $0{,}0923 = \frac{4}{6}\,A,$

$0{,}0431 = \frac{2}{6}\,A,$ $\qquad$ $0{,}0899 = \frac{4}{6}\,A,$

$0{,}0412 = \frac{2}{6}\,A,$ $\qquad$ $0{,}1331 = \frac{5}{6}\,A,$

$0{,}0551 = \frac{3}{6}\,A,$

deren Summe nun auf folgende Bestimmungsgleichung führt:

$$0{,}4700 = \tfrac{21}{6}\,A,$$

die endlich

$$A = \tfrac{2}{7}.\,0{,}4700 = 0{,}1343$$

gibt.

Wir können folglich

$$\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu} = 0{,}1343.\,\frac{n}{p},$$

oder den der Einfassung $\frac{n}{p}$ des Umfanges entsprechenden Ausflusscoefficienten

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu\left(1 + 0{,}1343.\,\frac{n}{p}\right)$$

setzen, und bekommen hiernach

$$\text{für } \frac{n}{p} = \tfrac{1}{6}, \quad \frac{\mu_{\frac{1}{6}} - \mu}{\mu} = 0{,}0224,$$

$$\text{,, } \frac{n}{p} = \tfrac{2}{6}, \quad \frac{\mu_{\frac{2}{6}} - \mu}{\mu} = 0{,}0448,$$

$$\text{,, } \frac{n}{p} = \tfrac{3}{6}, \quad \frac{\mu_{\frac{3}{6}} - \mu}{\mu} = 0{,}0671,$$

$$\text{,, } \frac{n}{p} = \tfrac{4}{6}, \quad \frac{\mu_{\frac{4}{6}} - \mu}{\mu} = 0{,}0895,$$

$$\text{,, } \frac{n}{p} = \tfrac{5}{6}, \quad \frac{\mu_{\frac{5}{6}} - \mu}{\mu} = 0{,}1119.$$

Zieht man diese Werthe für $\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu}$ von den entsprechenden Werthen der Beobachtung ab, so stellen sich folgende Fehler heraus:

$$0{,}0153 - 0{,}0224 = - 0{,}0071,$$
$$0{,}0431 - 0{,}0448 = - 0{,}0017,$$
$$0{,}0412 - 0{,}0448 = - 0{,}0036,$$
$$0{,}0551 - 0{,}0671 = - 0{,}0120,$$
$$0{,}0923 - 0{,}0895 = + 0{,}0028,$$
$$0{,}0899 - 0{,}0895 = + 0{,}0004,$$
$$0{,}1331 - 0{,}1119 = + 0{,}0212,$$

deren Summe, wie es sein muss, der Null gleich ist, und deren grösster Werth, allerdings nur bei dem in der Praxis wohl kaum vorkommenden Falle von $\frac{5}{6}$ Einfassung, wenig über zwei Procent beträgt.

Bidone gibt in den *Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino, Tomo XL.* folgende aus Versuchen abgeleitete Formeln für die Ausflusscoefficienten bei partieller Contraction:

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu_0 \left(1 + 0{,}1523 \frac{n}{p}\right) \text{ und}$$

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu_0 \left(1 + 0{,}1280 . \frac{n}{p}\right),$$

von denen die erstere für rectanguläre, die letztere aber für kreisförmige Mündungen gilt. Unsere Formel

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu_0 \left(1 + 0{,}1343 \frac{n}{p}\right)$$

liegt zwischen beiden inne.

Um noch mehr Schärfe zu erzielen, berücksichtigen wir nun auch noch den Coefficienten B, setzen also

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu \left(1 + A\left(\frac{n}{p}\right) + B\left(\frac{n}{p}\right)^2\right) \text{ oder}$$

$$\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu} = A\left(\frac{n}{p}\right) + B\left(\frac{n}{p}\right)^2,$$

und entwickeln nach der Methode der kleinsten Quadrate die Coefficienten A und B. Setzen wir die Werthe der Beobachtung ein, so bekommen wir folgende Gleichungen:

$$0{,}0153 = \frac{A}{6} + \frac{B}{36},$$

$$6{,}0431 = \frac{2A}{6} + \frac{4B}{36},$$

$$0{,}0412 = \frac{2A}{6} + \frac{4B}{36},$$

$$0{,}0551 = \frac{3A}{6} + \frac{9B}{36},$$

$$0{,}0923 = \frac{4A}{6} + \frac{16B}{36},$$

$$0{,}0899 = \frac{4A}{6} + \frac{16B}{36},$$

$$0{,}1331 = \frac{5A}{6} + \frac{25B}{36},$$

welche unter die allgemeine Form

$$z = Au + Bv$$

gehören.

Die bekannten, schon oben gebrauchten Formeln zur Bestimmung von A und B sind folgende.

$$A = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(uz) - \Sigma(uv)\,\Sigma(vz)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)} \text{ und}$$

$$B = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(vz) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uz)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)}.$$

Nun ist

$$\Sigma(u^2) = \frac{1+4+4+9+16+16+25}{36} = \frac{75}{36} = \frac{25}{12},$$

$$\Sigma(v^2) = \frac{1+16+16+81+256+256+625}{1296} = \frac{1251}{1296} = \frac{139}{144},$$

$$\Sigma(uv) = \frac{1+8+8+27+64+64+125}{216} = \frac{297}{216} = \frac{11}{8},$$

$$\Sigma(uz) = 0{,}00255 + 0{,}01437 + 0{,}01373 + 0{,}02755 + 0{,}06153 + 0{,}05993 + 0{,}11092 = 0{,}29058, \text{ und}$$

$$\Sigma(vz) = 0{,}000425 + 0{,}004790 + 0{,}004577 + 0{,}013775 + 0{,}041020 + 0{,}039953 + 0{,}092433 = 0{,}19697.$$

Demnach folgen

$$A = \frac{\frac{139}{144}.\ 0{,}29058 - \frac{11}{8}.\ 0{,}19697}{\frac{25}{12}.\frac{139}{144} - \frac{11}{8}.\frac{11}{8}} = \frac{0{,}280490 - 0{,}270834}{2{,}010995 - 1{,}890625} = \frac{0{,}009656}{0{,}120370} = 0{,}08022, \text{ und}$$

$$B = \frac{\frac{25}{12}.\ 0{,}19697 - \frac{11}{8}.\ 0{,}29058}{0{,}120370} = \frac{0{,}410354 - 0{,}399547}{0{,}120370} = \frac{0{,}010807}{0{,}120370} = 0{,}08978.$$

Die gesuchte Formel ist hiernach

$$\frac{\mu_{\frac{n}{p}} - \mu}{\mu} = 0{,}08022.\ \frac{n}{p} + 0{,}08978.\ \left(\frac{n}{p}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu \left(1 + 0{,}08022.\ \frac{n}{p} + 0{,}08978.\ \left(\frac{n}{p}\right)^2\right).$$

Die nach dieser Formel berechneten Werthe führen auf folgende Differenzen:

$$\begin{aligned} 0{,}0153 - 0{,}0159 &= -\ 0{,}0006, \\ 0{,}0431 - 0{,}0367 &= +\ 0{,}0064, \\ 0{,}0412 - 0{,}0367 &= +\ 0{,}0045, \\ 0{,}0551 - 0{,}0626 &= -\ 0{,}0075, \\ 0{,}0923 - 0{,}0934 &= -\ 0{,}0011, \\ 0{,}0899 - 0{,}0934 &= -\ 0{,}0035, \\ 0{,}1331 - 0{,}1292 &= +\ 0{,}0039, \end{aligned}$$

es beträgt also der grösste Werth derselben nicht mehr als $\frac{3}{4}$ Procent der Correction.

Da die partielle Einfassung der Ausflussöffnung dem Strahle eine schiefe oder von der Normale zur Ebene der Ausflussöffnung abweichende Richtung gibt und auch denselben mehr zerstreut, so ist es rathsam, dieselbe wo möglich zu vermeiden. Am häufigsten findet man sie noch bei Schutzöffnungen vor, wenn z. B. die Mündung bis zum Boden oder bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht. In diesen Fällen wird man sich am bequemsten der abgekürzten Formel

$$\mu_{\frac{n}{p}} = \mu_0 \left(1 + 0{,}08.\ \frac{n}{p} + 0{,}09 \left(\frac{n}{p}\right)^2\right)$$

oder folgender hiernach berechneten Tabelle bedienen können.

Tabelle XXXIV.

Die Correctionen der Ausflusscoefficienten für rectanguläre Mündungen wegen der partiellen Contraction.

Hundertel. \ Zehntel.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,000	0,009	0,020	0,032	0,046	0,062	0,080	0,100	0,122
1	0,001	0,010	0,021	0,033	0,048	0,064	0,082	0,102	0,124
2	0,002	0,011	0,022	0,035	0,049	0,066	0,084	0,104	0,126
3	0,002	0,012	0,023	0,036	0,051	0,068	0,086	0,106	0,128
4	0,003	0,013	0,024	0,038	0,052	0,069	0,088	0,108	0,131
5	0,004	0,014	0,026	0,039	0,054	0,071	0,090	0,111	0,133
6	0,005	0,015	0,027	0,040	0,056	0,073	0,092	0,113	0,135
7	0,006	0,016	0,028	0,042	0,057	0,075	0,094	0,115	0,137
8	0,007	0,017	0,029	0,043	0,059	0,077	0,096	0,117	0,140
9	0,008	0,018	0,031	0,045	0,061	0,079	0,098	0,119	0,142

Der Gebrauch dieser Tabelle ist ganz conform mit dem ähnlicher für die Correctionen der unvollkommenen Contraction construirten Tabellen, und wird durch folgendes Beispiel vollkommen erklärt.

Es sei für die über die ganze Breite eines Gerinnes weggehende und den Boden desselben unmittelbar berührende Schutzöffnung von 0,7 Meter Weite und 0,2 Meter Höhe der Ausflusscoefficient zu finden. Hier beträgt die Einfassung $= \frac{0,7 + 0,2.\ 2}{0,7.\ 2 + 0,2.\ 2} = \frac{1,1}{1,8} = \frac{11}{18} = 0,611$ des Umfanges der Mündung, es ist folglich die Correction wegen der partiellen Contraction für $\frac{n}{p} = 0,611$ oder genau genug für 0,61 zu suchen. Nun steht aber die Zahl 0,082 in der mit 6 überschriebenen Vertikal- und in der mit 1 anfangenden Horizontal-Columne, daher ist denn die gesuchte Correction $= 0,082$, und der entsprechende Ausflusscoefficient:

$$\mu_{0,61} = \mu_0\,(1 + 0,082) = 1,082.\ \mu_0.$$

Wäre endlich der Ausflusscoefficient dieser Mündung bei vollständiger Contraction $\mu_0 = 0,595$, so würde er für diesen Fall der partiellen Contraction $= 1,082.\ 0,595 = 0,644$ betragen.

---

2) Parallelepipedische Ansatzröhren mit inneren Einfassungen.

Die schon früher gebrauchte kurze parallelepipedische Ansatzröhre von 4,217 Centimeter Mündungsweite und 1,910 Centimeter Mündungshöhe (s. S. 109) gab

für die grössere Druckhöhe die Ausflusszeit von $76\frac{1}{2}$ Secunden,
für die mittlere Druckhöhe die Ausflusszeit von $93\frac{1}{2}$ Secunden und
für die kleinere die Ausflusszeit von $91\frac{3}{4}$ Secunden,

und diese Zeiten veränderten sich nur wenig, wenn die Einmündung dieser durch die bei den oben beschriebenen Versuchen über den Ausfluss durch Mündungen in der dünnen Wand gebrauchten Kupferbleche theilweise eingefasst und dadurch eine partielle Contraction beim Eintritt herbeigeführt war. Da, den letzten Versuchen zufolge, dem Ausfluss durch eingefasste Mündungen ein grösserer Ausfluss- und deshalb wohl auch ein grösserer Contractionscoefficient (α) zukommt als dem Ausfluss durch freie Mündungen, so wäre auch bei eingefassten Ansatzröhren eine Vergrösserung der Ausflusscoefficienten zu erwarten, und dies zumal auch wegen der Formel:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}}$$

für den Ausflusscoefficienten bei kurzen Ansatzröhren, wenn dieselbe auch nur annähernde Richtigkeit besitzen sollte, weil ja dieser zufolge μ mit α zugleich wächst; allein die hierüber angestellten Versuche weisen nicht nur eine solche Vergrösserung nicht nach, sondern deuten vielmehr auf eine kleine Abnahme der Ausflusscoefficienten hin. Auf welche Weise ist diese Erscheinung zu erklären? Wir haben schon oben erwähnt und können auch aus den beigefügten Figuren ersehen, dass die Wirkung der partiellen Contraction nicht bloss eine Vergrösserung der Ausflussmenge, sondern auch ein Zurseitedrücken und weiteres Ausbreiten des ausfliessenden Wassers ist; wir müssen daher auch annehmen, dass das Wasser in einer von der Röhrenaxe abweichenden Richtung aus dem Reservoir in die Röhre eintrete, dass es also beim Eintritt in die Röhre eine Richtungsveränderung erleiden müsse. Möge nun diese Veränderung in der Richtung plötzlich erfolgen, also mit einem Stosse verbunden sein, oder möge dieselbe nur allmälig vor sich gehen und sich deshalb nur durch eine Reibung zwischen

den mit verschiedenen Geschwindigkeiten an einander hingehenden und gekrümmten Wasserfäden äussern, immer wird doch durch dieselbe ein Verlust an lebendiger Kraft herbeigeführt. Dieser Verlust ist offenbar Ursache einer verminderten Ausflussgeschwindigkeit und also auch einer verminderten Ausflussmenge. Es ist also hiernach die eben angeführte Erscheinung beim Ausfluss durch mit inneren Einfassungen ausgerüstete kurze parallelepipedische Ansatzröhren völlig erklärlich. Führen wir nun noch die gewonnenen Ergebnisse etwas näher vor Augen.

War eine schmale Seite, also ein Sechstel des Umfanges der Einmündung des kurzen parallelepipedischen Rohres durch eine Blechtafel eingefasst, so blieben die Ausflusszeit und also auch der Ausflusscoefficient dieselben, als wenn diese Einfassung gar nicht vorhanden gewesen wäre, doch machte sich diese dadurch bemerklich, dass das Wasser an der Seite der Tafel mit einer grösseren Sprungweite, also schneller ausfloss als auf der entgegengesetzten Seite. Bei Einfassung einer langen, zwei Sechstel des Umfanges ausmachenden Seite fiel die Ausflusszeit 2 bis 3 Secunden grösser aus, und war eine lange und eine schmale Seite zugleich, also der halbe Umfang der rectangulären Einmündung eingefasst, so war die Ausflusszeit gar 4 bis 6 Secunden grösser als bei uneingefasster Einmündung; es stellt sich hiernach für den ersten Fall eine Verminderung von $2\frac{1}{2}$, für den zweiten aber eine solche von 5 Procent im Ausflusscoefficienten heraus. Waren die beiden langen Seiten, also vier Sechstel oder zwei Drittel des Umfanges symmetrisch eingefasst, so fiel die Ausflusszeit nur $\frac{1}{2}$ bis 1 Secunde grösser und deshalb der Ausflusscoefficient auch nur 1 Procent kleiner als bei vollkommen contrahirtem Eintritt aus. Die an den beiden schmalen Seiten, also an einem Drittel des Umfanges symmetrisch eingefasste Mündung gab endlich eine wirkliche Verminderung der Ausflusszeit von einer Secunde, welcher zufolge der Ausflusscoefficient um *circa* 1 Procent grösser ausfällt als bei uneingefasster Einmündung.

Beim Ausflusse durch das längere parallelepipedische Messingrohr (s. Seite 80 unten) verschwanden diese Abweichungen fast ganz; es mochte die Einmündung dieses Rohres ganz frei oder auf einer, zwei oder drei Seiten eingefasst sein, so blieben die Ausflusszeiten bis auf Differenzen von einer halben Secunde immer dieselben, es war nämlich

für die grössere Druckhöhe $\tau = 51\frac{1}{2}$ bis 52 Secunden,
für die mittlere $\tau = 63$ bis $63\frac{1}{2}$ und
für die kleinere $\tau = 61\frac{1}{2}$ bis 62 Secunden.

Es ist allerdings noch möglich, dass genauere und bei grösseren Ausflusszeiten angestellte Versuche auf eine von der Art der Einfassung abhängige Veränderlichkeit der Ausflusscoefficienten führen können, da indessen dieselbe in den meisten Fällen dem Vorhergehenden zufolge immer nur klein ausfallen wird, so haben wir davon abgestanden, fernere Versuche dieser Art anzustellen.

B. Versuche über den Ausfluss durch nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformte conoidische Mundstücke.

1) Das weitere zinnerne Mundstück geformt nach Fig. 5. Taf. I. (S. Seite 10.)

Der Durchmesser der Ausmündung dieses Ansatzstückes betrug 4,007 Centimeter, folglich der Inhalt derselben: $a = 12{,}611$ Quadratcentimeter.

Versuch unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7810$, $h_2 = 0{,}4020$, $h = 0{,}5759$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 40{,}5$ Secunden; hiernach berechneter Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficient $\mu = \varphi = 0{,}9700$.

Versuch unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4020$, $h_2 = 0{,}1155$, $h = 0{,}2371$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 47{,}5$ Sec., hieraus bestimmter Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficient $\mu = \varphi = 0{,}9747$.

Der Strahl war beim Ausflusse unter kleinerem Drucke noch heller und ruhiger als beim Ausflusse unter höherem Drucke; er fiel allmälig immer schöner und schöner aus, je tiefer der Wasserspiegel im Reservoir herabsank.

Versuch unter einem sehr kleinen Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}2392$, $h_2 = 0{,}0515$, $h = 0{,}1282$ Meter.

Ausflusszeit $\tau = 42{,}75$ Sec., hiernach berechneter Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficient: $\mu = \varphi = 0{,}9651$.

Diesem zufolge lässt sich der mittlere Werth des Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficienten $= 0{,}97$, also der Geschwindigkeitsverlust $= 3$ Procent setzen. Dem Coefficienten $\mu = 0{,}97$ entspricht der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}063$ (s. Abtheil. I. S. 107); daher ist der durch die Hindernisse des Mundstückes herbeigeführte Verlust an Druckhöhe $= 0{,}063 . \frac{v^2}{2g}$.

---

2) Das engere messingene Mundstück geformt nach Fig. 6. Taf. I. (S. Seite 10.)

Erste Versuchsreihe.

Der Durchmesser der Ausmündung dieses Mundstückes betrug 3,202 Centimeter, folglich war der Inhalt derselben: $a = 8{,}0525$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}7815$, $h_2 = 0{,}4028$, $h = 0{,}5766$ Meter.

Zeit $\tau = 63{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}9674$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}4028$, $h_2 = 0{,}1162$, $h = 0{,}2379$ Meter.

Zeit $\tau = 74{,}5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}9719$.

Mittel aus beiden Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficienten: $\mu = \varphi = 0{,}9696$.

Durch den oben (Seite 8) beschriebenen Apparat wurde der Durchmesser des Wasserstrahles $= 3{,}189$ Centimeter gefunden, und diesem nach wäre noch eine kleine Contraction in dem Strahle vorhanden, welcher der Contractionscoefficient

$$\alpha = \left(\frac{3{,}189}{3{,}202}\right)^2 = 0{,}9919$$

entspräche.

Aus diesem folgt nun der Geschwindigkeitscoefficient

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = \frac{0,9696}{0,9919} = 0,9775.$$

Wiewohl diese kleine Abweichung eher in der Unvollkommenheit der Strahlenmessung als in einer wirklichen Contraction des Strahles ihren Grund haben konnte, so hielten wir es doch für angemessen, das Letztere vorauszusetzen und deshalb wieder das Mundstück noch etwas auszudrehen, so dass der äussere Theil desselben auf 2 Millimeter Tiefe cylindrisch wurde. Die dadurch gewonnenen Ergebnisse waren folgende.

Zweite Versuchsreihe.

Durchmesser in der Ausmündung = 3,218 Centimeter, Inhalt derselben $a = 8,1332$ Quadratcentimeter.

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7859$, $h_2 = 0,4036$, $h = 0,5790$ Meter.
Zeit $t = 63,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,9649$.

Ausfluss unter mittlerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6390$, $h_2 = 0,2409$, $h = 0,4161$ Meter.
Zeit $t = 78$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,9651$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4036$, $h_2 = 0,1136$, $h = 0,2364$ Meter.
Zeit $t = 75,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,9640$.

Ausfluss unter sehr kleinem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,2409$, $h_2 = 0,0519$, $h = 0,1291$ Meter.
Zeit $t = 66,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,9651$.

Mittel aus den letzten vier Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficienten: $\mu = \varphi = 0,9648$, also kleiner als das Mittel der vorigen Versuche.

Solchem nach scheint denn beim Ausfluss durch ein conoidisches Mundstück, wie beim Ausfluss durch eine Mündung in der dünnen Wand (s. Seite 74), ein Verlust von 3 bis 4 Procent Geschwindigkeit unvermeidlich zu sein.

Bei diesen Versuchen zeigte sich der Strahl anfänglich matt und wie mit einem dünnen Flor umzogen, er wurde aber immer heller und heller, je tiefer der Wasserspiegel sank, und fiel zuletzt krystallrein aus.

C. Versuche über den Ausfluss durch innere Ansatzröhren.

1) Ausfluss durch eine kurze Ansatzröhre mit einer zwei Millimeter breiten Stirnfläche.

Diese Röhre war anfänglich 8½ Centimeter lang und in der Ausmündung 2,8925 Centimeter weit, der Inhalt derselben war demnach: $a = 6,5711$ Quadratcentimeter. Wurde diese Röhre als äussere Ansatzröhre gebraucht, also so eingesetzt, dass die Stirnfläche der Einmündung in die Wand-

fläche des Ausflussreservoirs zu liegen kam, so erhielt man für die grössere, mittlere und kleinere Druckhöhe die Ausflusscoefficienten

0,8172, 0,8154, 0,8070,

also im Mittel $\mu = 0,8132$. (S. Seite 93 und 94.)

Als innere Ansatzröhre gebraucht, d. i. dieselbe so (s. Fig. 17) eingesetzt, dass das äussere Ende B derselben in die Gefässwand CD zu liegen kam und die Einmündung EF nach innen zu etwa 6 Centimeter von der inneren Gefässwand abstand, erhielt man bei einem zerrissenen, die Röhre ausfüllenden Strahl Folgendes.

Bei grösserem Druck.

$h_1 = 0,6390$, $h_2 = 0,2411$, $h = 0,4162$ Meter.

Zeit $\tau = 115$ Secunden, Ausflusscoefficient $\mu = 0,8097$.

Bei kleinerem Druck.

$h_1 = 0,4034$, $h_2 = 0,1139$, $h = 0,2365$ Meter.

Zeit $\tau = 111,5$ Secunden, Ausflusscoefficient $\mu = 0,8063$.

Das Mittel (0,8080) der beiden letzten Ausflusscoefficienten ist nur wenig kleiner als der mittlere Ausflusscoefficient (0,8132) für die äussere Ansatzröhre.

Wurde dieselbe Röhre als innere Röhre in das weitere und längere Messingrohr (s. Seite 7), also so eingesetzt, dass die Ausmündungen beide in eine Ebene fielen, so ergab sich Folgendes:

Druckhöhen: $h_1 = 0,7781$, $h_2 = 0,3964$, $h = 0,5713$ Meter.

Zeit $\tau = 92\frac{1}{2}$ Sec., hieraus berechnet: $\mu_2 = 0,8241$ und $\frac{1}{\mu_2^{\,2}} = 1,4725$.

Für das weitere Rohr allein ist $\frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 1,1528$, daher folgt für die kurze innere Ansatzröhre allein: $\zeta = \frac{1}{\mu_2^{\,2}} - \frac{1}{\mu_1^{\,2}} = 0,3197$ und sonach der entsprechende Ausflusscoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} = 0,8705.$$

Als äussere Ansatzröhre wurde unter übrigens gleichen Umständen früher (Seite 104) $\mu = 0,8763$ gefunden.

Um einen Ausfluss bei ungefülltem Querschnitt der Röhre, also einen vollkommen contrahirten Strahl zu erhalten, wurde die Röhre in zwei gleiche Theile, von welchen jeder nur $4\frac{1}{4}$ Centimeter Länge behielt, zerschnitten. Wurden die Versuche auf die gewöhnliche Weise ausgeführt, so floss das Wasser in einem zerrissenen, aber die Röhre ausfüllenden Strahl aus; um aber einen contrahirten, die Röhre nicht ausfüllenden, mit dem Innern dieser gar nicht in Berührung kommenden Strahl zu erzeugen, wurde anfänglich die Einmündung durch ein mit Flanell überzogenes Bret zugedeckt und dasselbe, wenn der Versuch beginnen sollte, plötzlich abgezogen. Das Wasser hatte dann keine Gelegenheit, sich an die Röhrenwand anzulegen, und floss deshalb während des ganzen Versuches in einem krystallreinen contrahirten Strahle aus.

Ergebniss des Versuches bei gefülltem Querschnitt.

Druckhöhen: $h_1 = 0,6297$, $h_2 = 0,2324$, $h = 0,4343$ Meter.

Zeit $\tau = 121,5$ Sec., Querschnitt $a = 6,3794$ Quadratcentimeter, berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0,7973$.

Ergebniss des Versuches bei ungefülltem Querschnitt.

Druckhöhen: die vorigen.

Zeit $\tau = 157,3$ Sec., Querschnitt $a = 6,5711$ Quadratcentimeter; hieraus berechneter Ausflusscoefficient $\mu = 0,5979$.

---

2) Ausfluss durch eine kurze Ansatzröhre mit einer ein Millimeter breiten Stirnfläche.

Diese Röhre bei 8½ Centimeter Länge als innere Ansatzröhre in das Ausflussreservoir eingesetzt gab nur vollen Ausfluss und dabei folgende Resultate.

Ausfluss bei grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7852$, $h_2 = 0,4034$, $h = 0,5785$ Meter.

Zeit $\tau = 95$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7976$.

Ausfluss bei kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,4034$, $h_2 = 0,1137$, $h = 0,2364$ Meter.

Zeit $\tau = 114,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7859$.

Mittel aus den beiden letzten Ausflusscoefficienten: $\mu = 0,7917$.

Dieselbe Röhre bei halber Länge, also 4¼ Centimeter Länge gab bei vollem Ausfluss einen ganz zerrissenen besenförmigen Strahl und folgende Resultate:

Druckhöhen: $h_1 = 0,6309$, $h_2 = 0,2336$, $h = 0,4081$ Meter.

Zeit $\tau = 123,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7603$.

Bei ungefülltem Querschnitt war der Strahl krystallrein und es stellte sich bei denselben Druckhöhen die Zeit $\tau = 162,8$ heraus. Nun ist aber der Durchmesser der Einmündung $= 2,850$ Centimeter und sonach der Inhalt derselben $a = 6,3794$ Quadratcentimeter, daher folgt der Ausflusscoefficient $\mu = 0,5941$.

---

3) Ausfluss durch eine kurze, an der Einmündung äusserlich zugeschärfte, eine etwa noch 0,2 Millimeter breite Stirnfläche *EF* behaltende Ansatzröhre *AB* (Fig. 18).

Bei unverkürzter Länge (8½ Centimeter) gab der volle Ausfluss bei einem ganz zerrissenen, in divergirenden Fäden ausfliessenden Strahle folgende Resultate:

Ausfluss unter grösserem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,7675$, $h_2 = 0,3850$, $h = 0,5599$ Meter.

Zeit $\tau = 108,25$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7128$.

Ausfluss unter kleinerem Drucke.

Druckhöhen: $h_1 = 0,3850$, $h_2 = 0,0950$, $h = 0,2156$ Meter.

Zeit $\tau = 132,5$ Sec., Ausflusscoefficient $\mu = 0,7118$.

Mittel aus beiden Ausflusscoefficienten $= 0,7123$.

Beim verkürzten nur noch $4\frac{1}{4}$ Centimeter langen Rohre konnte ein bleibender voller Ausfluss nicht erzwungen werden, dagegen entstand ein auf das Maximum zusammengezogener ganz ruhig ausfliessender krystallreiner Strahl *CD* (Fig. 18), und man erhielt Folgendes:

Druckhöhen: $h_1 = 0{,}6293$, $h_2 = 0{,}2320$, $h = 0{,}4064$ Meter.

Zeit $\tau = 179$ Sec., Querschnitt der Einmündung $a = 6{,}4873$ Quadratcentimeter, hiernach berechneter Ausfluss- oder Contractionscoefficient $\mu = \alpha = 0{,}5324$.

Es folgt aus den vorstehenden Beobachtungsresultaten, dass der Ausflusscoefficient bei inneren Ansatzröhren von der Breite der Stirnfläche an der Einmündung abhängt und dass er mit dieser zugleich abnimmt, der Ausfluss mag voll oder bei ungefüllter Röhre erfolgen. Während der Ausflusscoefficient für eine äussere Ansatzröhre oder, was auf eins hinauskommt, für eine innere Ansatzröhre mit hinreichend (mindestens 3 Millimeter) breiter Stirnfläche bei vollem Ausfluss *circa* $= 0{,}81$ ist, fällt derselbe bei der inneren Ansatzröhre mit einer schmalen, kaum 0,2 Millimeter betragenden Stirnfläche nur 0,71 aus, und es steht zu erwarten, dass er sich bei einer inneren Ansatzröhre mit vollkommen zugeschärfter Einmündung noch etwas kleiner herausstellen werde. Wenn ferner für eine Mündung in der dünnen ebenen Wand oder, was einerlei ist, für eine kurze äussere Ansatzröhre, oder für eine kurze innere Ansatzröhre mit hinreichend breiter Stirnfläche bei ungefülltem Ausfluss der Ausflusscoefficient *circa* 0,61 ist, so beträgt derselbe bei einer inneren Ansatzröhre von einer nur 0,2 Millimeter breiten Stirnfläche bei ungefülltem Rohre nur 0,53, und es ist anzunehmen, dass er noch kleiner ausfallen würde, wenn die Röhre in der Einmündung äusserlich vollkommen zugeschärft wäre.

Aehnliche Versuche haben *Borda* und *Bidone* angestellt. Es ist hierüber nachzusehen:

Mém. de l'Acad. de Paris 1766 und

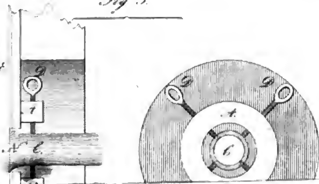
Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino 1840;

letzteres im Auszug in der allgemeinen Maschinenencyclopädie Artikel „Ausfluss".

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

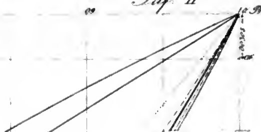
n Wassers.

Fig. 1



n Curven dargestellt.

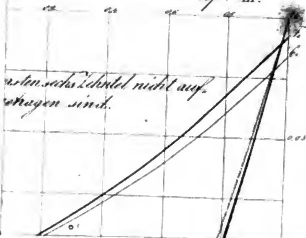
Taf. II



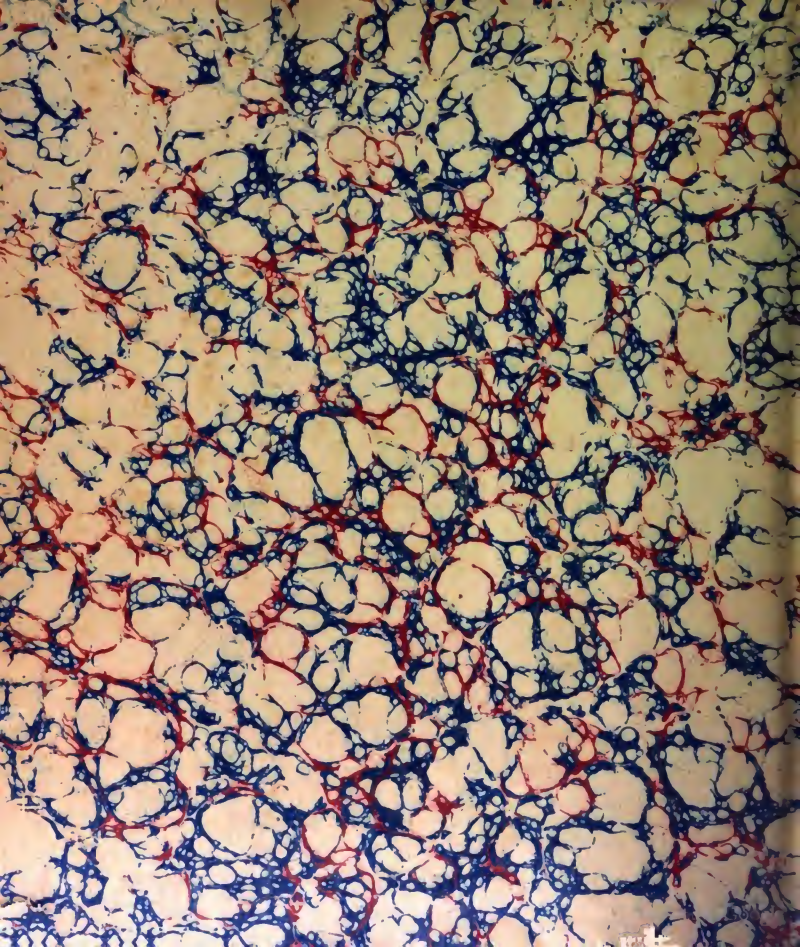
rentirt

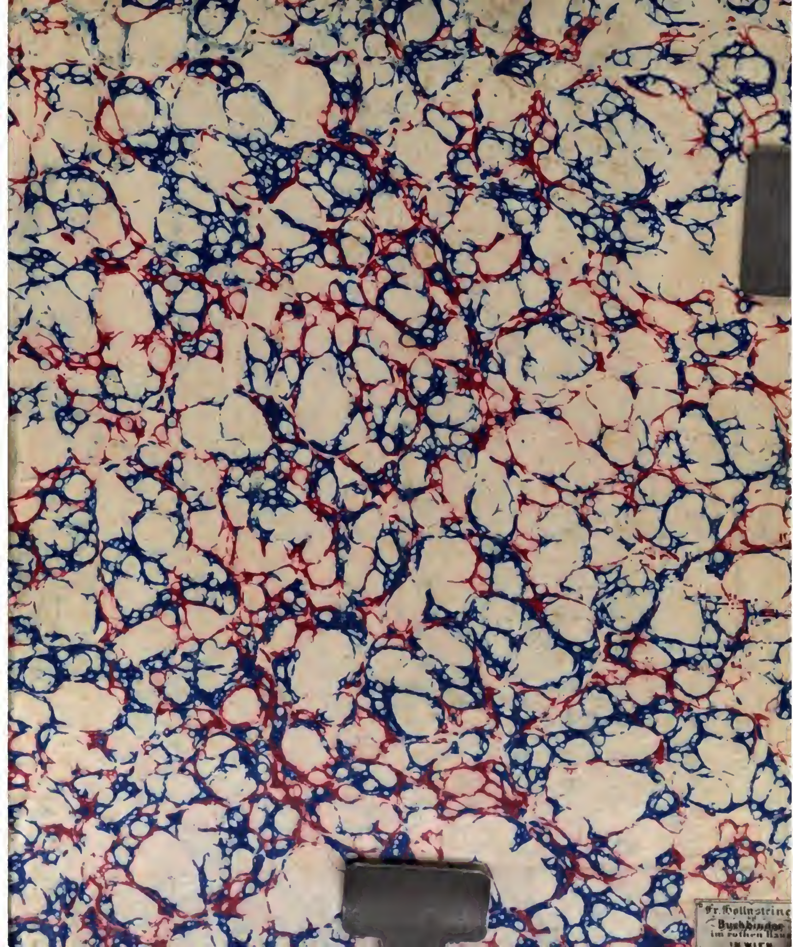
aten.

...gestellt.




ÖNB
+Z150912709




Fr. Hollnsteine
Buchbinder
im rothen Hau
IN WIEN

